

---

# Projizierte gestörte Coulomb-Dirac-Operatoren und ihre Eigenwerte

---



Dissertation  
an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von  
**DAVID MÜLLER**  
am 24. Januar 2018



Erstgutachter: Prof. Dr. Heinz Siedentop  
Zweitgutachter: Prof. TeknD Timo Weidl  
Drittgutachter: Prof. Dr. Marcel Griesemer

Tag der Disputation: 04. Mai 2018



## **Zusammenfassung**

In dieser Dissertation werden Dirac-Operatoren studiert, die in der mathematischen Beschreibung verschiedener physikalischer Modelle Verwendung finden. Dabei nehmen Coulomb-Dirac-Operatoren, d. h. Dirac-Operatoren mit Coulomb-Potentialen, eine zentrale Rolle ein.

Zunächst untersuchen wir die Eigenwerte in der Lücke des wesentlichen Spektrums der Dirac-Operatoren, deren Potentiale eine Coulomb-Singularität haben können, um die Bindungsenergien eines relativistischen Elektrons, das sich in einem kernfeldähnlichen Potential bewegt, zu bestimmen. Es gelingt uns für diese Eigenwerte eine Minimax-Charakterisierung zu beweisen.

Anschließend zeigen wir untere Schranken auf die Beträge der Coulomb-Dirac-Operatoren in Form von Potenzen des Laplace-Operators und wenden diese Resultate an. Dadurch erhalten wir Stabilitätsaussagen für das relativistische Elektronen-Positronen-Feld in einem Coulomb-Potential. Zusätzlich gewinnen wir Abschätzungen auf die Energien gebundener Zustände, welche in verunreinigtem Graphen durch eine elektromagnetische Störung erzeugt werden. Mathematisch ausgedrückt entspricht dies Abschätzungen vom Typ Cwikel-Lieb-Rozenblum und Lieb-Thirring auf die negativen Eigenwerte der gestörten masselosen Coulomb-Dirac-Operatoren im Furry-Bild.

Motiviert durch diese Abschätzungen untersuchen wir abschließend für alle selbstadjungierten Realisierungen der positiv projizierten masselosen Coulomb-Dirac-Operatoren die Existenz eines virtuellen Niveaus bei null, d. h., es wird analysiert, ob jede beliebig kleine negative Störung dieser Operatoren einen negativen Eigenwert erzeugt.



## Abstract

In this work we study Dirac operators, which are used in the mathematical description of different physical models. An important role will be played by Coulomb-Dirac operators, i.e., Dirac operators with Coulomb potentials.

At first, we prove a minimax characterisation of eigenvalues in the gap of the essential spectrum of Dirac operators with potentials, which may have a Coulomb singularity. These eigenvalues correspond to bound state energies of a relativistic Hydrogen-like system.

Subsequently, we prove lower bounds on the moduli of Coulomb-Dirac operators in terms of powers of the Laplacian. As an application we improve known results concerning the stability of the relativistic electron-positron field in a Coulomb potential. We also obtain estimates on the energies of the bound states in graphene created by an electromagnetic perturbation. From the mathematical point of view this corresponds to estimates of Cwikel-Lieb-Rozenblum and Lieb-Thirring type on the negative eigenvalues of perturbed massless Coulomb-Dirac operators in the Furry picture.

We complete our study by analysing the existence of virtual levels for all self-adjoint realisations of positively projected massless Coulomb-Dirac operators, i.e., we examine whether every negative perturbation of these operators creates a negative eigenvalue.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Überblick über die Resultate und Modelle</b>	<b>7</b>
2.1	Minimax-Prinzipien . . . . .	7
2.1.1	Ein abstraktes Resultat . . . . .	8
2.1.2	Anwendungen . . . . .	9
2.2	Selbstadjungierte Realisierungen durch Hardy-Dirac-Ungleichungen . . . . .	10
2.3	Untere Schranken auf die Beträge der Coulomb-Dirac-Operatoren . . . . .	14
2.4	Die Stabilität des Elektronen-Positronen-Feldes . . . . .	17
2.5	Abschätzungen für die Eigenwerte der Quantenpunkte in verunreinigtem Graphen . . . . .	18
2.6	Über die Existenz der virtuellen Niveaus der projizierten Coulomb-Dirac-Operatoren . . . . .	21
2.6.1	Selbstadjungierte Realisierungen der Coulomb-Dirac-Operatoren auf der Halbachse . . . . .	22
2.6.2	Über virtuelle Niveaus der positiv projizierten masselosen Coulomb-Dirac-Operatoren auf der Halbachse . . . . .	23
2.6.3	Lieb-Thirring-artige Abschätzungen auf die negativen Eigenwerte von $F_{\theta}^{\nu,\kappa}(Q)$ . . . . .	25
2.6.4	Zusammenfassung der Resultate über $F_{\theta}^{\nu,\kappa}(Q)$ . . . . .	26
2.6.5	Anwendung auf die projizierten masselosen Coulomb-Dirac-Operatoren . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Beweise der Resultate</b>	<b>33</b>
3.1	Beweis von Satz 2.1.1 . . . . .	33
3.2	Beweis von Satz 2.1.2 . . . . .	42
3.2.1	Überprüfung von (2.1.4) und (2.1.5) . . . . .	43
3.2.2	Drehimpulskanalzerlegung im Impulsraum . . . . .	43
3.2.3	Überprüfung von (2.1.8) für das Minimax-Prinzip von Talman . . . . .	46
3.2.4	Überprüfung von (2.1.8) für das Minimax-Prinzip von Esteban und Séré . . . . .	48
3.3	Beweis von Satz 2.2.1 . . . . .	50
3.4	Beweis von Satz 2.2.3 . . . . .	51
3.4.1	Determinierende Bereiche für Coulomb-Dirac-Operatoren . . . . .	52

## INHALTSVERZEICHNIS

---

3.4.2	Eine abstrakte Charakterisierung des Definitionsbereiches des Abschlusses einer quadratischen Form . . . . .	54
3.4.3	Anwendung von Lemma 3.4.4 . . . . .	55
3.5	Beweis von Satz 2.3.1 und 2.3.4 . . . . .	57
3.5.1	Mellin-, Fourier- und ähnliche Transformationen . . .	59
3.5.2	Transformierte relativistische Coulomb-Operatoren . .	68
3.5.3	Kritische untere Schranken . . . . .	73
3.5.4	Abschätzungen in den kritischen Kanälen . . . . .	76
3.5.5	Abschätzungen in den nicht kritischen Kanälen . . . .	81
3.5.6	Zum Beweis von Satz 2.3.1 . . . . .	83
3.5.7	Zum Beweis von Satz 2.3.4 . . . . .	85
3.6	Beweis von Satz 2.3.2 . . . . .	85
3.6.1	Eigenschaften von $\eta^\nu$ . . . . .	86
3.6.2	Die optimale Konstante in (3.5.88) . . . . .	88
3.6.3	Die Nichtnegativität von $c_2, c_4$ und $c_6$ . . . . .	90
3.6.4	Bestimmung einer unteren Schranke . . . . .	96
3.7	Beweis von Korollar 2.3.3 . . . . .	97
3.8	Beweis von Lemma 2.5.1 . . . . .	98
3.9	Beweis von Satz 2.5.2 . . . . .	99
3.10	Beweis von Satz 2.5.3 . . . . .	99
3.11	Beweis von Satz 2.6.2 . . . . .	100
3.11.1	Die spektrale Darstellung von $D_\theta^{\nu, \kappa}$ . . . . .	101
3.11.2	Zum Beweis von Satz 2.6.2 Teil (I) . . . . .	114
3.11.3	Eine Version des Birman-Schwinger-Prinzips . . . . .	116
3.11.4	Zum Beweis von Satz 2.6.2 Teil (II) . . . . .	117
3.11.5	Abschneiden der hohen Energien . . . . .	118
3.11.6	Zum Beweis von Satz 2.6.2 Teil (III) . . . . .	119
3.12	Beweis von Satz 2.6.3 . . . . .	120
3.12.1	Anwendung des Birman-Schwinger-Prinzips . . . . .	120
3.12.2	Zum Beweis von Satz 2.6.3 Teil (a) . . . . .	123
3.12.3	Zum Beweis von Satz 2.6.3 Teil (b) . . . . .	123
3.13	Beweis von Satz 2.6.4 . . . . .	124
3.14	Beweis von Satz 2.6.5 . . . . .	125

## Literatur

127

# 1 Einleitung

Der Dirac-Operator, dessen Potential  $V$  eine Coulomb-Singularität haben kann, beschreibt die relativistische Dynamik eines Elektrons, das sich in einem kernfeldähnlichen Potential bewegt [16]. Diese Art von Dirac-Operatoren wollen wir in dieser Dissertation in zwei und drei Dimensionen gleichzeitig behandeln. Daher nehmen wir für die Dimension  $n$  an, dass  $n \in \{2, 3\}$  gilt. In  $n$  Dimensionen entspricht das relativistische Elektron einem Spinor mit

$$N = N(n) := 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \quad (1.0.1)$$

Komponenten und  $V$  ist eine messbare, hermitesche  $N \times N$ -Matrixfunktion auf  $\mathbb{R}^n$  [41]. Wir sagen, dass  $V$  genau dann zur Klasse der Potentiale  $\mathfrak{P}_n^\nu$  gehört, wenn die Ungleichungen

$$V \leq 0 \text{ und } \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \|x|V(x)\|_{\mathbb{C}^{N \times N}} < \nu \quad (1.0.2)$$

gelten. Außerdem legen wir fest, dass  $V$  genau dann ein Element von  $\overline{\mathfrak{P}_n^\nu}$  ist, wenn in (1.0.2) beide Ungleichungen mit dem Kleiner-gleich-Zeichen gelten. Durch die obigen Ausführungen motiviert stellt sich die Frage, ob der Dirac-Operator mit Potential  $V \in \overline{\mathfrak{P}_n^{(n-1)/2}}$  und Masse  $M \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n^M(V) &:= \begin{cases} -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + M\sigma_3 + V & \text{für } n = 2, \\ -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + M\beta + V & \text{für } n = 3, \end{cases} \\ &\text{definiert auf } C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^N) \end{aligned} \quad (1.0.3)$$

eine selbstadjungierte Fortsetzung hat. In Definition (1.0.3) sind  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$  Vektoren; sind  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die Pauli Matrizen; ist  $\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{C}^2} & \sigma_i \\ \sigma_i & 0_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix}$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  und entspricht  $\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{\mathbb{C}^2} & 0_{\mathbb{C}^2} \\ 0_{\mathbb{C}^2} & -\mathbb{I}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix}$ .

Für einen Coulomb-Dirac-Operator, d. h. einen Dirac-Operator mit einem Coulomb-Potential, kann durch eine Anwendung der Sturm-Liouville-Theorie (siehe [40, 7, 83] oder Hinweis 3.4.3 (c)) festgestellt werden, dass eine selbstadjungierte Realisierung existiert, diese aber nicht eindeutig sein muss. Daher ist eine Bedingung gesucht, welche eine klare physikalische Interpretation besitzt und die genau eine selbstadjungierte Fortsetzung von (1.0.3) erfüllt. Tatsächlich gibt es für  $V \in \overline{\mathfrak{P}_n^{(n-1)/2}}$  eine eindeutige selbstadjungierte Fortsetzung  $D_n^M(V)$  von  $\tilde{D}_n^M(V)$ , für welche der Erwartungswert der kinetischen Energie einer beliebigen Wellenfunktion im Definitionsbereich der Fortsetzung endlich ist, d. h.

$$\mathfrak{D}(D_n^M(V)) \subset H^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N). \quad (1.0.4)$$

Die Existenz dieser ausgezeichneten selbstadjungierten Erweiterung ist in [60, 86, 54, 43, 13] bewiesen. Für den Fall, dass  $V = -\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  gilt, existiert daher für  $\nu \in [0, (n-1)/2)$  eine eindeutige physikalisch ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzung  $D_n^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  von  $\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$ .

Eine hohe Relevanz erhalten die Coulomb-Dirac-Operatoren dadurch, dass diese in der mathematischen Beschreibung verschiedener physikalischer Modelle benutzt werden. So werden die dreidimensionalen Coulomb-Dirac-Operatoren z. B. in der quantenelektrodynamischen Beschreibung des Elektronen-Positronen-Feldes verwendet, welches an ein äußeres Coulomb-Potential gekoppelt ist (siehe Abschnitt 2.4). Die Kopplungskonstante in diesem Modell wird mit  $\nu$  bezeichnet. In [6] wird gezeigt, dass für alle  $\nu \in [0, \sqrt{3}/2)$  die Stabilität des Elektronen-Positronen-Feldes im Wesentlichen aus der Tatsache folgt, dass es ein  $C^\nu > 0$  gibt, sodass

$$|D_3^0(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^4})| \geq C^\nu \sqrt{-\Delta} \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^4} \quad (1.0.5)$$

gilt.

In zwei Dimensionen werden Coulomb-Dirac-Operatoren bei der Modellierung von Graphen, welches mit einer Punktladung verunreinigt wurde, benutzt [57]. Durch eine äußere Störung können in diesem verunreinigten Graphen gebundene Zustände erzeugt werden [63, 21, 46, 36]. In Abschnitt 2.5 wird ein Modell vorgestellt, welches dieses Verhalten beschreibt. Es stellt sich heraus, dass man aus Ungleichungen für die zweidimensionalen Coulomb-Dirac-Operatoren, welche analog zu (1.0.5) sind, Abschätzungen auf die Anzahl und die Summe der Energien der gebundenen Zustände gewinnen kann. Leider ist es nicht möglich mit der Methode, welche zum Beweis von (1.0.5) verwendet wurde, solche Ungleichungen für die zweidimensionalen masselosen Coulomb-Dirac-Operatoren zu beweisen. Daher ist das Ziel zu zeigen, dass für  $\nu \in [0, (n-1)/2)$  ein  $C_n^\nu > 0$  existiert, sodass

$$|D_n^0(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})| \geq C_n^\nu \sqrt{-\Delta} \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N} \quad (1.0.6)$$

gilt. Dadurch würde das dreidimensionale Resultat in [6] verbessert werden und erstmals ein analoges Resultat in zwei Dimensionen bewiesen werden.

Für  $\nu \in [0, (n-1)/2)$  ist der Definitionsbereich von  $D_n^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  in  $H^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  enthalten und für  $\tilde{D}_n^M((1-n)(2|\cdot|)^{-1} \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  gibt es keine selbstadjungierte Erweiterung, welche diese physikalische Bedingung erfüllt (siehe Hinweis 3.4.3 (d)). In diesem Sinn ist  $(n-1)/2$  eine kritische Kopplungskonstante und daher kann (1.0.6) für keine selbstadjungierte Realisierung des Coulomb-Dirac-Operators mit kritischer Kopplungskonstante gelten. Da aber in [25, 79] gezeigt wird, dass es für  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  eine ausgezeichnete

selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  gibt, welche für  $n = 3$  und  $\nu \in [0, 1)$  mit  $D_3^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^4})$  übereinstimmt, soll untersucht werden, ob der Betrag dieser selbstadjungierten Realisierung des masselosen Coulomb-Dirac-Operators mit der kritischen Kopplungskonstante nach unten durch Potenzen des Laplace-Operators abgeschätzt werden kann.

Die Existenz dieser ausgezeichneten selbstadjungierten Fortsetzung von  $\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  für  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  ist eng mit der Gültigkeit einer sogenannten Hardy-Dirac-Ungleichung [17] verbunden, welche direkt aus einer noch unbewiesenen Minimax-Charakterisierung der Eigenwerte massiver Coulomb-Dirac-Operatoren gewonnen werden kann [18]. Daher ist die erste Problemstellung, welche diskutiert werden soll, ob für  $M > 0$  und  $V \in \mathfrak{P}_n^{(n-1)/2}$  die Eigenwerte von  $D_n^M(V)$  durch ein Minimax-Prinzip charakterisiert werden können.



## 2 Überblick über die Resultate und Modelle

Die Resultate und Ausführungen, welche in den nächsten Abschnitten präsentiert werden, wurden bereits in ähnlicher Form in [51, 53, 49, 52, 50] veröffentlicht. Zur besseren Nachvollziehbarkeit wird in jedem Lemma, Satz oder Korollar eine genaue Referenz angegeben. Unter den Quellenangaben kann man auch die Beweise dieser Resultate finden. In Kapitel 3 führen wir diese Beweise in modifizierter Form aus und geben zusätzlich bei umfangreicheren Beweisen eine Beweisidee oder Gliederung des Beweises an.

Bei allen Publikationen mit Koautoren hat der Autor dieser Dissertation einen wesentlichen Anteil beigetragen.

### 2.1 Minimax-Prinzipien

Sei  $V \in \mathfrak{P}_n^{(n-1)/2}$ . Mit Hilfe der Kato-Seiler-Simon-Ungleichung (Satz 4.1 in [65]) kann Weyls Satz (Satz XIII.14 in [58]) über das wesentliche Spektrum angewendet werden und

$$\sigma_{\text{ess}}(D_n^M(V)) = (-\infty, -M] \cup [M, \infty) \quad (2.1.1)$$

gezeigt werden. Die Details der Ausführungen zur Gültigkeit von (2.1.1) können z. B. in Proposition 1 in [13] studiert werden. Dementsprechend hat  $D_n^M(V)$  mit positiver Masse eine Lücke im wesentlichen Spektrum. Die Eigenwerte in dieser Lücke sind von großem physikalischem Interesse; z. B. entspricht der kleinste Eigenwert  $\mu_1$  in dieser Lücke der Grundzustandsenergie des Elektrons, welches sich im Potential  $V$  bewegt. Für den dreidimensionalen Fall schlug Talman [71] (später auch Datta et al. [15]) folgende formale Minimax-Charakterisierung von  $\mu_1$  vor:

$$\mu_1 = \min_{\chi \neq 0} \max_{\psi} \frac{\left\langle \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}, D_3^M(V) \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|^2}. \quad (2.1.2)$$

In (2.1.2) sind  $\chi$  und  $\psi$  der obere und untere Bispinor eines 4-Spinors, aber die Mengen, über welche Minimum und Maximum gebildet werden sollen, sind nicht festgelegt. Eine erste rigorose Minimax-Charakterisierung der Eigenwerte in der Lücke wurde für den dreidimensionalen Fall in [26] angegeben. Dort werden die Eigenwerte in aufsteigender Reihenfolge und mit Vielfachheit gezählt und dann wird für den  $k$ -ten Eigenwert bewiesen, dass

$$\mu_k = \inf_{\substack{\mathfrak{M} \text{ Teilraum von } P_{3,+}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \\ \dim \mathfrak{M} = k}} \sup_{\psi \in (\mathfrak{M} \oplus P_{3,-}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)) \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{d}_3^M[\psi] + \mathbf{v}[\psi]}{\|\psi\|^2} \quad (2.1.3)$$

gilt, falls  $V \in \mathfrak{P}_3^{1/2}$  ist. In (2.1.3) entsprechen  $\mathbf{d}_3^M$  und  $\mathbf{v}$  den quadratischen Formen von  $D_3^M(0)$  und  $V$ . Außerdem ist  $P_{3,+}^M$  der Projektor auf den nicht-negativen Spektralbereich von  $D_3^M(0)$  und  $P_{3,-}^M := \mathbb{I} - P_{3,+}^M$ .

### 2.1.1 Ein abstraktes Resultat

Durch die obigen Ausführungen motiviert, stellt sich die Frage nach einer Minimax-Charakterisierung der Eigenwerte in der Lücke des wesentlichen Spektrums von möglicherweise nicht halbbeschränkten Operatoren. Natürlich kann für einen selbstadjungierten Operator mit einer Lücke im wesentlichen Spektrum durch den Spektralprojektor auf die Lücke und Courants Minimax-Prinzip [12] eine solche Charakterisierung immer angegeben werden, wenn die Einschränkung des Operators auf die Lücke halbbeschränkt ist. Allerdings ist dieser Spektralprojektor meistens unbekannt. Daher besteht die Hoffnung, dass wie in (2.1.3) eine solche Charakterisierung auch mit einem anderen Projektor möglich ist. Dementsprechend werden einfach zu überprüfende Bedingungen auf Projektoren gesucht, welche eine Minimax-Charakterisierung der Eigenwerte wie in (2.1.3) sicherstellen.

Das erste Resultat dieser Art wurde in [35] bewiesen. Als Korollar erhielten die Autoren, dass die Minimax-Charakterisierung des kleinsten Eigenwertes nach Talman für  $-2\mathbb{I}_{\mathbb{C}^4} < V \leq 0$  mit  $V(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  in drei Dimensionen korrekt ist. Eine weitere Folgerung war, dass (2.1.3) für  $V \in \mathfrak{P}_3^\gamma$  gilt [34], wobei  $\gamma \approx 0.3$  die reelle Lösung von  $2\gamma^3 - 3\gamma^2 + 4\gamma = 1$  ist. In [19] wurde das Resultat in [26] auf eine Klasse von Potentialen erweitert, welche  $\mathfrak{P}_3^{2/(2/\pi + \pi/2)}$  enthält. In [18] wurde ein weiteres abstraktes Minimax-Prinzip bewiesen. Durch dessen Anwendung konnte die Gültigkeit der Minimax-Prinzipien von Esteban-Séré und Talman für  $V \in \mathfrak{P}_3^{\sqrt{3}/2}$  bewiesen werden.

Das abstrakte Minimax-Prinzip, das hier vorgestellt werden soll, kann auf eine natürliche Art und Weise auf selbstadjungierte Operatoren angewendet werden, welche als Formstörungen (siehe Abschnitt 2 in [54]) von symmetrischen Sesquilinearformen erhalten werden. Das Minimax-Prinzip lautet:

**Satz 2.1.1** (Satz 1 in [51]). *Seien  $\mathbf{q}, \mathbf{v}$  symmetrische Sesquilinearformen mit  $\mathfrak{D}[\mathbf{q}] \subset \mathfrak{D}[\mathbf{v}]$  und  $B$  ein selbstadjungierter Operator in einem separablen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$ , welche*

$$\langle Bx, y \rangle = \mathbf{q}[x, y] + \mathbf{v}[x, y] \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{D}(B), y \in \mathfrak{D}[\mathbf{q}]; \quad (2.1.4)$$

$$\mathfrak{D}(B) = \left\{ x \in \mathfrak{D}[\mathbf{q}] : \sup_{y \in \mathfrak{D}[\mathbf{q}] \setminus \{0\}} \frac{|\mathbf{q}[x, y] + \mathbf{v}[x, y]|}{\|y\|} < \infty \right\} \quad (2.1.5)$$



erfüllen. Seien  $\mathfrak{H}_\pm$  orthogonale Teilräume von  $\mathfrak{H}$ , sodass  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$  gelte und  $\Lambda_+, \Lambda_-$  seien die entsprechenden Projektoren auf  $\mathfrak{H}_+$  und  $\mathfrak{H}_-$ . Es werden folgende Bedingungen angenommen:

$$(i) \quad \mathfrak{D}_\pm := \Lambda_\pm \mathfrak{D}[q] \subset \mathfrak{D}[q], \quad (2.1.6)$$

$$(ii) \quad a := \sup_{x \in \mathfrak{D}_- \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{q}[x] + \mathbf{v}[x]}{\|x\|^2} < \infty, \quad (2.1.7)$$

$$(iii) \quad \lambda_1 > a \quad \text{mit} \quad (2.1.8)$$

$$\lambda_k := \inf_{\substack{\mathfrak{V} \text{ Teilraum von } \mathfrak{D}_+ \\ \dim \mathfrak{V} = k}} \sup_{x \in (\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{D}_-) \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{q}[x] + \mathbf{v}[x]}{\|x\|^2}. \quad (2.1.9)$$

Sei  $b := \inf (\sigma_{\text{ess}}(B) \cap (a, \infty)) \in [a, \infty]$ . Die Eigenwerte von  $B$  im Intervall  $(a, b)$  werden mit Vielfachheit in nicht fallender Reihenfolge durchnummeriert. Falls für  $k \in \mathbb{N}$  ein solcher  $k$ -ter Eigenwert existiert, wird dieser mit  $\mu_k$  bezeichnet und ansonsten  $\mu_k$  gleich  $b$  gesetzt. Unter diesen Annahmen gilt

$$\lambda_k = \mu_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Der Beweis dieses Satzes basiert auf den Beweisen der abstrakten Resultate in [18] und [35]. Im Gegensatz zu diesen Arbeiten wird aber konsequent mit Formen anstatt mit Operatoren gearbeitet. In [51] wird Satz 2.1.1 benutzt, um die Gültigkeit von (2.1.3) für alle  $V \in \mathfrak{P}_3^1$  und vom Talman-Minimax-Prinzip für Potentiale in  $\overline{\mathfrak{P}}_3^{2/(2/\pi + \pi/2)}$  zu zeigen.

### 2.1.2 Anwendungen

Das abstrakte Minimax-Prinzip, welches in Satz 2.1.1 formuliert ist, wird verwendet um die Minimax-Prinzipien von Talman (siehe (2.1.2)) und Esteban-Loss (siehe (2.1.3)) für  $V \in \mathfrak{P}_n^{(n-1)/2}$  zu beweisen, d. h. insbesondere für jedes Coulomb-Potential, für welches eine selbstadjungierte Realisierung des entsprechenden Coulomb-Dirac-Operators existiert, die Bedingung (1.0.4) erfüllt. Aufgrund der physikalischen Interpretation von (1.0.4) können diese Resultate daher vom physikalischen Standpunkt als optimal angesehen werden. Die exakte Formulierung lautet:

**Satz 2.1.2** (Satz 1 und 2 in [53]). *Seien  $V \in \mathfrak{P}_n^{(n-1)/2}$  und  $M > 0$ . Falls der  $k$ -te Eigenwert von  $D_n^M(V)$  in  $(-M, M)$  existiert, wobei in nicht fallender Reihenfolge und mit Vielfachheit gezählt wird, dann wird dieser mit  $\mu_k$  bezeichnet. In den nachfolgenden Formeln sind  $\mathbf{d}_n^M$  und  $\mathbf{v}$  die quadratischen Formen von  $D_n^M(0)$  und  $V$ .*

(a) *Es gilt das Talman-Minimax-Prinzip*

$$\mu_k = \inf_{\substack{\mathfrak{M} \text{ Teilraum von } \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2}) \\ \dim \mathfrak{M} = k}} \sup_{\psi \in (\mathfrak{M} \oplus \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})) \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{d}_n^M[\psi] + \mathbf{v}[\psi]}{\|\psi\|^2}.$$

(b) *Es gilt das Esteban-Séré-Minimax-Prinzip*

$$\mu_k = \inf_{\substack{\mathfrak{M} \text{ Teilraum von } P_{n,+}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N) \\ \dim \mathfrak{M} = k}} \sup_{\psi \in (\mathfrak{M} \oplus P_{n,-}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)) \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{d}_n^M[\psi] + \mathbf{v}[\psi]}{\|\psi\|^2}.$$

Hier entspricht  $P_{n,+}^M$  dem Projektor auf den nichtnegativen Spektralbereich von  $D_n^M(0)$  und  $P_{n,-}^M := \mathbb{I} - P_{n,+}^M$ .

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die Aussagen in Satz 2.1.2 für  $n = 2$  die Ersten ihrer Art sind und Satz 2.1.2 (b) für  $n = 3$  eleganter als in [51] bewiesen wird.

Satz 1.(4) und Satz 11.(b) in [24] besagen, dass für  $V \in \overline{\mathfrak{P}}_n^{(n-1)/2}$  der Operator  $D_n^M(0) + V_\varepsilon$  mit  $V_\varepsilon := \max\{-1/\varepsilon, V\}$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  im Sinne der Normresolventenkonvergenz konvergiert. Da der Grenzwert mit  $D_n^M(V)$  für  $V \in \mathfrak{P}_n^{(n-1)/2}$  übereinstimmt, kann diese Art der Konstruktion einer Fortsetzung von  $\tilde{D}_n^M(V)$  als Verallgemeinerung von [54] verstanden werden. In [24] wird dann gezeigt, dass eine Version von Satz 2.1.2 auch für die selbstadjungierte Realisierung von  $\tilde{D}_n^M(V)$  mit  $V \in \overline{\mathfrak{P}}_n^{(n-1)/2}$  gilt, welche auf diese Art konstruiert wurde. Interessanterweise kann der angegebene Beweis dieses Resultates mit Satz 2.1.1 oder dem abstrakten Minimax-Prinzip in [18] geführt werden.

## 2.2 Selbstadjungierte Realisierungen durch Hardy-Dirac-Ungleichungen

Eine direkte Folge der Minimax-Charakterisierung des Dirac-Operators in Satz 2.1.2 ist das nachfolgende Resultat.

**Satz 2.2.1** (Satz 3 in [53]). *Seien  $M > 0$  und  $v$  eine skalare Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $v\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N} \in \mathfrak{P}_n^{(n-1)/2}$  gilt. Außerdem wird der Differentialausdruck*

$$K_n := \begin{cases} -i\partial_1 + \partial_2 & \text{für } n = 2, \\ -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla & \text{für } n = 3, \end{cases}$$

definiert und mit  $\lambda(v)$  der kleinste Eigenwert von  $D_n^M(v\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  in der Lücke  $(-M, M)$  bezeichnet. Dann gilt für alle  $\chi \in H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$  die Ungleichung

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|K_n \chi(\mathbf{x})|^2}{M + \lambda(v) - v(\mathbf{x})} d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} (M - \lambda(v) + v(\mathbf{x})) |\chi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.2.1)$$

In [18] wird gezeigt, wie Ungleichung (2.2.1) für  $n = 3$  mit der Hilfe des Minimax-Prinzips von Talman bewiesen werden kann. Aufgrund des erstmaligen Beweises eines talmanschen Minimax-Prinzips für Dirac-Operatoren in zwei Dimensionen kann diese Technik auch verwendet werden um (2.2.1) für  $n = 2$  zu beweisen. In [79, 17] wird (2.2.1) für radialsymmetrische  $v$  durch Drehimpulskanalzerlegung direkt bewiesen, allerdings mit einem Wert für  $\lambda(v)$ , welcher mit der Ausnahme, dass  $v$  ein Coulomb-Potential ist, nicht so optimal wie  $\lambda(v)$  ist.

Da nach [20, 73] für  $\nu \in (0, (n-1)/2)$  der kleinste Eigenwert von  $D_n^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  in  $(-M, M)$  gleich  $M\sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2}$  ist, folgt aus Satz 2.2.1 mit einem einfachen Grenzwertübergang:

**Korollar 2.2.2** (Korollar 4 in [53]). *Seien  $M \geq 0$  und  $\nu \in [0, (n-1)/2]$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|K_n \chi(\mathbf{x})|^2}{M + M\sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2} + \frac{\nu}{|\mathbf{x}|}} d\mathbf{x} \geq \\ \int_{\mathbb{R}^n} \left( -M + M\sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2} + \frac{\nu}{|\mathbf{x}|} \right) |\chi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

für alle  $\chi \in H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$ .

Durch die Wahl von  $\nu = (n-1)/2$  und das Ersetzen von  $\chi$  durch  $\varepsilon^{(1-n)/2} \chi(\varepsilon^{-1} \cdot)$  in (2.2.2) erhält man eine Ungleichung, welche für  $\varepsilon$  gegen null

$$\frac{(n-1)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\chi(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}| |K_n \chi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (2.2.3)$$

ergibt. Wählt man nun  $\chi = (g, 0)$  für  $n = 3$  und  $\chi = g$  für  $n = 2$  und wertet (2.2.3) für den Real- und Imaginärteil von diesem  $\chi$  getrennt voneinander aus, so folgt

$$\frac{(n-1)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}| |\nabla g(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.2.4)$$

Aus 2.2.4 folgt mit  $g(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}|^{-n/2}f(|\mathbf{x}|)$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichung

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(r)|^2}{r^2} dr \leq \int_{\mathbb{R}_+} |f'(r)|^2 dr, \quad (2.2.5)$$

welche von Hardy [37], während des Versuches die existierenden Beweise für Hilberts Doppelreihensatz [84] zu vereinfachen, entdeckt wurde und dementsprechend in der Literatur als Hardy-Ungleichung bekannt ist. Auf der anderen Seite folgt aus (2.2.5) zusammen mit  $|\langle \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \nabla g(\mathbf{x}) \rangle| \leq |\nabla g(\mathbf{x})|$  die Ungleichung (2.2.4). Daher wird (2.2.1) als Hardy-Dirac-Ungleichung bezeichnet.

Da  $-(M + \nu/|\cdot|)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^{N/2}}$  die Untermatrix von  $\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot|)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  ist, welche durch das Streichen der ersten beiden Zeilen und Spalten entsteht, wird für  $M > 0$

$$K_n^* \frac{1}{M + \nu/|\cdot|} K_n + (M - \nu/|\cdot|)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^{N/2}} \quad (2.2.6)$$

als das Schurkomplement von  $-(M + \nu/|\cdot|)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^{N/2}}$  in  $\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot|)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  bezeichnet. Der symmetrische Operator in (2.2.6) ist nach Korollar 2.2.2 für  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  und  $M > 0$  nichtnegativ und daher ist die zugehörige quadratische Form nach Friedrichs Fortsetzungssatz (siehe Satz X.23 in [58]) abschließbar. Der Definitionsbereich der abgeschlossenen quadratischen Form des Operators in (2.2.6) wird mit  $\mathfrak{D}_n^{\nu, M}$  abgekürzt. Nach Satz 1.1 in [25] besitzt dann der Operator  $\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot|)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  für  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  und  $M > 0$  eine eindeutige selbstadjungierte Fortsetzung  $\mathbf{D}_n^{\nu, M}$ , deren Definitionsbereich in  $\mathfrak{D}_n^{\nu, M} \times L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$  enthalten ist. Die analoge selbstadjungierte Realisierung eines masselosen Coulomb-Dirac-Operators wird für  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  durch

$$\mathbf{D}_n^\nu := \mathbf{D}_n^{\nu, 0} := \begin{cases} \mathbf{D}_2^{\nu, 1} - \sigma_3 & \text{für } n = 2, \\ \mathbf{D}_3^{\nu, 1} - \beta & \text{für } n = 3, \end{cases} \quad (2.2.7)$$

definiert.

Um den Operator  $\mathbf{D}_n^{\nu, M}$  mit  $\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot|)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  für  $M \geq 0$  und  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  zu vergleichen, wird eine explizite Darstellung des determinierenden Bereichs von  $\mathbf{D}_n^{\nu, M}$  untersucht. Für dessen Formulierung wird eine Funktion

$$\begin{aligned} \xi_n^\nu \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}) \text{ benötigt, für welche der Grenzwert} \\ \lim_{t \searrow 0} \xi_n^\nu(t) \text{ existiert und ungleich null ist. Zusätzlich muss} \\ \int_0^\infty (\xi_n^\nu(t)^2 + (\xi_n^\nu)'(t)^2) t^2 \sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2} dt < \infty \text{ gelten.} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Ferner führen wir im nächsten Satz die Notation für Polar- und Kugelkoordinaten ein. Mit dem Koordinatenpaar  $(\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$  werden Radius und Winkelkoordinate in  $\mathbb{R}^2$  und mit dem Koordinatentriple  $(r, \theta, \phi) \in [0, \infty) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$  werden Radius, Polar- und Azimutwinkel in  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. Für  $m \in \{-1/2, 1/2\}^{n-1}$  definieren wir die Funktionen  $\zeta_{n,m}^\nu$  in Polarkoordinaten (für  $n = 2$ )

$$\zeta_{2,m}^\nu(\rho, \varphi) := \xi_2^\nu(\rho) \rho^{\sqrt{1/4 - \nu^2} - 1/2} \begin{pmatrix} \nu \frac{e^{-i(1/2+m)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \\ -i(\sqrt{1/4 - \nu^2} + (-1)^{1/2-m}/2) \frac{e^{i(1/2-m)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

und in Kugelkoordinaten (für  $n = 3$ )

$$\zeta_{3,m}^\nu(r, \theta, \phi) := \xi_3^\nu(r) r^{\sqrt{1 - \nu^2} - 1} \begin{pmatrix} \nu \Omega_{\frac{1}{2} + m_2, m_1, -m_2}(\theta, \phi) \\ -i(\sqrt{1 - \nu^2} + (-1)^{\frac{1}{2} - m_2}) \Omega_{\frac{1}{2} - m_2, m_1, m_2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

wobei  $\Omega_{l,m,s}$  (siehe Relation (7) in [27]) die sphärischen Spinoren bezeichnet. Im nächsten Satz wird die Darstellung des determinierenden Bereichs des Operators  $\mathbf{D}_n^{\nu,M}$  mit der Hilfe der Funktionen  $\zeta_{n,m}^\nu$  formuliert, welche in (2.2.9) und (2.2.10) eingeführt wurden.

**Satz 2.2.3** (Verallgemeinerung von Satz 5 in [53]). *Seien  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  und  $M \geq 0$ . Die Menge*

$$\mathfrak{C}_n^\nu := \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^N) + \begin{cases} \{0\} \text{ für } n = 2, \nu = 0 \text{ oder} \\ n = 3, \nu \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}], \\ \text{span}\{\zeta_{n,m}^\nu : m \in \{-1/2, 1/2\}^{n-1}\} \text{ sonst,} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

*ist ein determinierender Bereich des Operators  $\mathbf{D}_n^{\nu,M}$ .*

Im Hinweis 3.4.3 (b) wird argumentiert, dass für  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  die Menge  $\mathfrak{C}_n^\nu$  ein determinierender Bereich von  $D_n^M(-\nu/|\cdot| \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  ist. Eine direkte Konsequenz ist:

**Korollar 2.2.4** (Korollar 6 in [53]). *Sei  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  und  $M > 0$ . Die ausgezeichneten selbstadjungierten Erweiterungen von  $\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot| \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  im Sinne von [54] und [25] stimmen überein, d. h.*

$$\mathbf{D}_n^{\nu,M} = D_n^M(-\nu/|\cdot| \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}).$$

An dieser Stelle soll noch angemerkt werden, dass  $\mathbf{D}_n^{\nu,M}$  für  $M \geq 0$  und  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  nach Satz 1.(4) und Satz 11.(b) in [24] auch als der Norm-resolventengrenzwert von  $D_n^M(0) - \min\{\nu/|\cdot|, \varepsilon^{-1}\}$  aufgefasst werden kann.

### 2.3 Untere Schranken auf die Beträge der Coulomb-Dirac-Operatoren

In diesem Abschnitt werden untere Schranken auf die Beträge der zwei- und dreidimensionalen Coulomb-Dirac-Operatoren durch Potenzen des Laplace-Operators formuliert. Beim Beweis der jeweiligen Resultate stellt sich heraus, dass die dreidimensionale Situation einfacher als die zweidimensionale ist. Dies liegt vor allem an der Existenz einer Hardy-Ungleichung in drei Dimensionen.

Bevor wir nun die entsprechenden Resultate formulieren, möchten wir auf eine Besonderheit in der Notation hinweisen. Wir kürzen für  $\lambda \in [0, \infty)$  und  $k \in \mathbb{N}$  den Operator  $(-\Delta)^\lambda \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^k}$  durch  $(-\Delta)^\lambda$  ab.

**Satz 2.3.1** (Satz 1(1.) in [49] und Satz I.1 in [50]). *Für jedes  $\nu \in [0, (n-1)/2)$  gibt es ein  $C_n^\nu > 0$ , sodass*

$$|\mathbf{D}_n^\nu| \geq C_n^\nu \sqrt{-\Delta} \quad (2.3.1)$$

*gilt.*

Für  $n = 2$  liefert der Beweis von Satz 2.3.1 eine untere Schranke auf die optimale Konstante in (2.3.1). Diese wird hier aber nicht angegeben, weil dafür noch das technische Problem in Hinweis 3.5.21 gelöst werden muss. Aufgrund des hohen Arbeitsaufwandes und der Tatsache, dass die explizite Kenntnis dieser Schranke für die in Abschnitt 2.5 diskutierte Anwendung nicht von fundamentaler Bedeutung ist, wurde auf das Lösen des Problems in 3.5.21 verzichtet. Im Gegensatz dazu ist die explizite Kenntnis einer unteren Schranke auf den maximal möglichen Wert von  $C_3^\nu$  für die in Abschnitt 2.4 diskutierte Anwendung wesentlich.

**Satz 2.3.2** (Satz I.1 in [50]). *Sei  $\nu \in [0, 1)$ . Die Ungleichung  $|\mathbf{D}_3^\nu| \geq S^\nu \sqrt{-\Delta}$  gilt mit*

$$S^\nu := (1 - \pi\sqrt{1 - \nu^2} \cot(\pi\sqrt{1 - \nu^2}/2)/2)\eta^\nu, \quad (2.3.2)$$

*wobei*

$$\eta^\nu := \begin{cases} \frac{(9 + 4\nu^2)^{1/2} - 4\nu}{3(1 - 2\sqrt{1 - \nu^2} \cot(\pi\sqrt{1 - \nu^2}/2))} & \text{für } \nu \in [0, 1) \setminus \{\sqrt{3}/2\}, \\ 1 & \text{für } \nu = \sqrt{3}/2, \\ \frac{\sqrt{3}(\pi - 2)}{\pi(4 - \sqrt{13})} & \text{für } \nu = 1. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

## 2.3 Untere Schranken auf die Beträge der Coulomb-Dirac-Operatoren

Aus Satz 2.3.1 folgen auch Abschätzungen für die massiven Coulomb-Dirac-Operatoren.

**Korollar 2.3.3** (Verallgemeinerung von Korollar I.2 in [50]). *Für jedes  $\nu \in [0, (n-1)/2)$  und  $M > 0$  gelten die Ungleichungen*

$$|\mathbf{D}_n^{\nu,M}| \geq C_n^\nu \sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2} \sqrt{-\Delta} \quad (2.3.4)$$

und

$$|\mathbf{D}_n^{\nu,M}| \geq \max \left\{ \frac{\sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2} C_n^\nu}{1 + C_n^\nu}, (1 - 2\nu)(n-2) \right\} \sqrt{-\Delta + M^2}. \quad (2.3.5)$$

An dieser Stelle sei auf die Relation  $|\mathbf{D}_n^{0,M}| = \sqrt{-\Delta + M^2}$  hingewiesen. Für  $n = 3$  und  $\nu \in [0, \sqrt{3}/2)$  wurde bereits in Lemma 1 in [1] und Lemma 1 in [6] gezeigt, dass Abschätzungen vom Typ (2.3.1), (2.3.4) und (2.3.5) gelten können. Die Ungleichungen in diesen Arbeiten folgen aus

$$(\mathbf{D}_n^{\nu,M})^2 \geq \tilde{C}_n^{\nu,M}(-\Delta). \quad (2.3.6)$$

Die Abschätzung (2.3.6) kann aber nicht mit  $\tilde{C}_n^{\nu,M} > 0$  für  $(n, \nu) \in (\{2\} \times (0, 1/2)) \cup (\{3\} \times (\sqrt{3}/2, 1))$  gelten, weil in diesem Fall der Definitionsbereich von  $\mathbf{D}_n^{\nu,M}$  nicht in  $H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  enthalten ist (siehe Satz 2.2.3). Zusätzlich sei noch erwähnt, dass für  $(n, \nu) \in \{3\} \times [0, \sqrt{3}/2]$  die Werte der unteren Schranken auf die optimalen Konstanten in Satz 2.3.1 und Korollar 2.3.3, welche sich aus Satz 2.3.2 ergeben, eine Verbesserung der Schranken in [1, 6] darstellt. Diese Tatsache wird in der Abbildung 1 durch das Abbilden von  $S^\nu$  (siehe (2.3.2)) und der unteren Schranke  $S_{\text{BRS}}^\nu$  aus [6] auf den optimalen Wert der Konstante in Satz 2.3.1 verdeutlicht. In Abbildung 1 wird außerdem ersichtlich, dass die Konstante  $S_{\text{BRS}}^\nu$  aus den oben genannten Gründen für  $\nu \geq \sqrt{3}/2$  verschwindet.

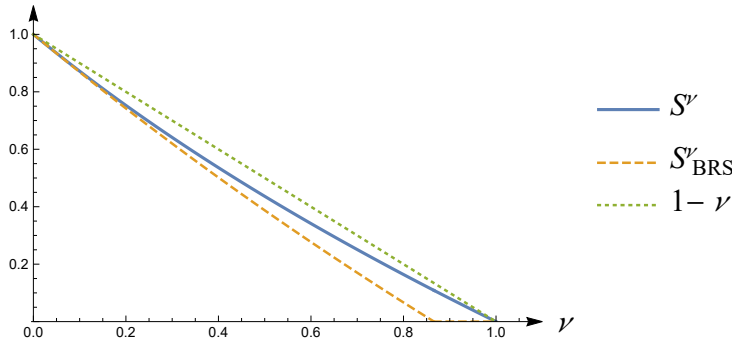


Abbildung 1: Der Graph von  $S^\nu$  im Vergleich mit  $S_{\text{BRS}}^\nu$  und  $1 - \nu$ . Die Quelle für diese Abbildung ist [50].

In Abbildung 2 wird für  $n = 3$  der Graph der unteren Schranke auf die optimale Konstante in (2.3.5) dargestellt, welche sich aus Satz 2.3.2 ergibt. Zusätzlich wird auch die untere Schranke  $1 - 2\nu$  aus Lemma 1 in [1] abgebildet.

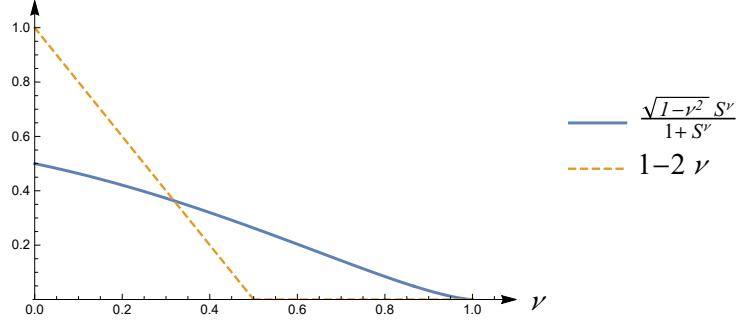


Abbildung 2: Die Graphen von  $\sqrt{1-\nu^2}S^\nu/(1+S^\nu)$  und  $1-2\nu$ . Die Quelle für diese Abbildung ist [50].

Dass Satz 2.3.1 nicht für  $\nu = (n-1)/2$  gelten kann, folgt aus der Tatsache, dass nach Satz 2.2.3 der Definitionsbereich der quadratischen Form von  $\mathbf{D}_n^{(n-1)/2}$  nicht in  $H^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  enthalten ist. Man kann aber  $|\mathbf{D}_n^{(n-1)/2}|$  mit Potenzen des Laplace-Operators vergleichen, welche kleiner als  $1/2$  sind.

**Satz 2.3.4** (Satz 1(2.) in [49] und Satz I.3 in [50]). *Für jedes  $\lambda \in [0, 1)$  gibt es ein  $K_n^\lambda > 0$ , sodass für alle  $a > 0$  die Ungleichung*

$$|\mathbf{D}_n^{(n-1)/2}| \geq K_n^\lambda a^{\lambda-1} (-\Delta)^{\lambda/2} - a^{-1} \quad (2.3.7)$$

*gilt.*

Ausdrücke für die Konstante in Satz 2.3.4 sind im entsprechenden Beweis angegeben. Die Ungleichung (2.3.7) steht in direkter Verbindung zur folgenden Abschätzung für einen masselosen relativistischen Operator mit Coulomb-Potential: Für jedes  $\lambda \in [0, 1)$  gibt es ein  $L_n^\lambda > 0$ , sodass für alle  $a > 0$  die Ungleichung

$$(-\Delta)^{1/2} - \frac{2(\Gamma((n+1)/4))^2}{(\Gamma((n-1)/4))^2 |\cdot|} \geq L_n^\lambda a^{\lambda-1} (-\Delta)^{\lambda/2} - a^{-1} \quad (2.3.8)$$

gilt (siehe Ungleichung (1.8) in [29] und Satz 2.3 in [67]).

In den nächsten beiden Abschnitten werden Anwendungen der Resultate dieses Abschnitts diskutiert.



## 2.4 Die Stabilität des Elektronen-Positronen-Feldes

Die Hartree-Fock-Theorie [38, 66] ist eine Methode der nichtrelativistischen Quantenmechanik, mit der man unter anderem  $K$  Elektronen, welche mit einem Kernfeld wechselwirken, in der Näherung des mittleren Feldes untersuchen kann. Diese Methode basiert auf der Erfahrung, dass die Minimierung des Rayleigh-Quotienten des nichtrelativistischen Hamilton-Operators des  $K$ -Elektronensystems über der Menge der Hartree-Fock-Zustände (Slaterdeterminanten von Einteilchenwellenfunktionen siehe z. B. Abschnitt 13.3 in [61]) eine gute obere Schranke auf die Grundzustandsenergie des  $K$ -Elektronensystems liefert. Die Euler-Lagrange-Gleichungen dieses Variationsproblems sind als Hartree-Fock-Gleichungen bekannt.

Ein Ansatz um auch relativistische Effekte mit einzubeziehen ist die relativistische Version der Hartree-Fock-Theorie, die sogenannte Dirac-Fock-Theorie [70]. In dieser Theorie ist der Hamilton-Operator des  $K$ -Elektronensystems  $H_K^{\text{rel}}$  eine direkte Verallgemeinerung des Einteilchen-Dirac-Operators. Durch die Bestimmung der Euler-Lagrange-Gleichungen des Rayleigh-Quotienten von  $H_K^{\text{rel}}$  auf der Menge der Dirac-Fock-Zustände (Analogon zu Hartree-Fock-Zuständen) erhält man die Dirac-Fock-Gleichungen.

Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Theorien ist, dass der nichtrelativistische Hamilton-Operator auf der Menge der Hartree-Fock-Zustände im Gegensatz zu  $H_K^{\text{rel}}$  auf der Menge der Dirac-Fock-Zustände nach unten beschränkt ist. Dieser Unterschied führt bei der numerischen Lösung der Dirac-Fock-Gleichung zu Problemen wie dem Variationszusammenbruch oder scheinbaren Eigenfunktionen [78, 62, 68]. Zusätzlich führt die Tatsache, dass  $H_K^{\text{rel}}$  keine stabilen gebundenen Zustände haben kann, zu Interpretationsproblemen [5, 69].

Da die Unbeschränktheit des Dirac-Operators in der Quantenelektrodynamik durch Diracs Interpretation des Vakuums (siehe Abschnitt 10 in [73]) verschwindet, wird in [9, 10] ein quantenelektrodynamischer Ansatz zur Herleitung einer relativistischen Version der Hartree-Fock-Gleichungen entwickelt. Diesem Ansatz folgend wird nun das relativistische Elektronen-Positronen-Feld in zweiter Quantisierung ohne magnetische Effekte mit einem Coulomb-Potential als äußerem Potential für verallgemeinerte Hartree-Fock-Zustände betrachtet, um daraus eine relativistische Näherung des mittleren Feldes herzuleiten, welche nicht an den Problemen der Dirac-Fock-Theorie leidet. Dies bedeutet insbesondere, dass der Hamilton-Operator

$$\mathbb{H} := \int dx : \Psi^*(x) \mathbf{D}_3^{\nu, M} \Psi(x) : + \frac{\alpha}{2} \int dx \int dy \frac{:\Psi^*(x) \Psi^*(y) \Psi(y) \Psi(x):}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2.4.1)$$

des Elektronen-Positronen-Feldes im Furry-Bild eingeschränkt auf die verallgemeinerten Hartree-Fock-Zustände auf Beschränktheit nach unten untersucht werden muss. In (2.4.1) ist  $\Psi$  der Feldoperator,  $\alpha > 0$  die Feinstrukturkonstante und  $: O :$  steht für die Wick-Ordnung des Operators  $O$ . Weitere Details der Notation in (2.4.1) und Satz 2.4.1 werden in [6, 1] erläutert.

Wie in Abschnitt 2 in [6] erklärt (Hinweis zu Tippfehler: Die Ungleichung in Abschnitt 2(ii) in [6] muss mit der Ungleichung (1) in [6] übereinstimmen!) folgt aus der Abschätzung (2.3.4) und Satz 2.3.2 das folgende Resultat.

**Satz 2.4.1** (Satz I.4 in [50]). *Seien  $\nu \in [0, 1)$  und  $M, \alpha \geq 0$ . Dann ist für*

$$\alpha \leq 4\sqrt{1 - \nu^2} S^\nu / \pi \quad (2.4.2)$$

*die Energie  $\mathcal{E}(\varrho) := \varrho(\mathbb{H})$  nichtnegativ für alle verallgemeinerten Hartree-Fock-Zustände  $\varrho$ .*

Für den physikalischen Wert der Feinstrukturkonstante  $\alpha \approx 1/137$  ist die Bedingung (2.4.2) für  $\nu \lesssim 0.97$  erfüllt, d. h. für die Kernladungszahl  $Z = \nu/\alpha$  bis einschließlich 132. In Satz 1 in [6], welcher eine Verbesserung von Satz 2 in [1] ist, wurde dasselbe Resultat wie in Satz 2.4.1 unter der Bedingung

$$\alpha \leq (4/\pi)(1 - \nu^2)^{1/2}(\sqrt{4\nu^2 + 9} - 4\nu)/3$$

bewiesen. Diese Bedingung, welche stärker als Bedingung (2.4.2) ist, gilt für  $\alpha \approx 1/137$  bis zur Kernladungszahl  $Z = \nu/\alpha \leq 117$  und kann nicht für ein beliebiges  $\alpha > 0$  gelten, falls  $\nu \geq \sqrt{3}/2$  gilt.

## 2.5 Abschätzungen für die Eigenwerte der Quantenpunkten in verunreinigtem Graphen

Wie in [63, 21] theoretisch vorhergesagt und in [46, 36] vor kurzem experimentell beobachtet, können elektrostatische Potentiale einen Quantenpunkt, d. h. gebundene Zustände in Graphen, erzeugen. Daher untersuchen wir eine Schicht Graphen, welche mit einer Punktladung verunreinigt wurde, und beweisen Abschätzungen auf die Energien der gebundenen Zustände, welche durch ein äußeres elektromagnetisches Potential erzeugt werden. Dabei wird ein ähnliches Model wie in [22] verwendet.

Die Flächen der Bandstruktur Graphens, welche zu Valenz- und Leitungsband gehören, berühren sich in sogenannten konischen Punkten. Die Dispersionsrelation in der Nähe der konischen Punkte entspricht der Dispersionsrelation masseloser Fermionen, welche sich mit der Fermi-Geschwindigkeit  $\nu_F$  ( $\approx 10^6 m/s$ ) anstelle der Lichtgeschwindigkeit bewegen [77, 28]. Im Folgenden werden die Einheiten so gewählt, dass  $\hbar\nu_F = 1$  gilt. Diese Eigenschaften

Graphens führen dazu, dass der effektive Hamilton-Operator für Graphen, welches durch eine positive Punktladung verunreinigt wurde, in der Nähe der konischen Punkte durch den masselosen Coulomb-Dirac-Operator  $\mathbf{D}_2^\nu$  gegeben ist (siehe [57] und Abschnitt IV in [8]).

Die Fermi-Energie für verunreinigtes Graphen beträgt null, da das Valenzband vollbesetzt und das Leitungsband unbesetzt ist [77]. Nach dem Pauli-Prinzip können Zustände unterhalb der Fermi-Energie nicht besetzt werden. Daher sind die physikalisch verfügbaren Zustände alle Zustände über dem Dirac-See, d. h., die Energie dieser Zustände ist nicht kleiner als die Fermi-Energie. Weil die Fermi-Energie null ist, entspricht der physikalische Zustandsraum  $\mathbf{P}_{2,+}^\nu \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ , wobei  $\mathbf{P}_{2,+}^\nu$  der Projektor von  $\mathbf{D}_2^\nu$  auf das Intervall  $[0, \infty)$  ist.

Nun wird das verunreinigte Graphen durch ein elektromagnetisches Potential  $V$  gestört. Es wird angenommen, dass diese Störung so schwach ist, dass der Dirac-See nicht wesentlich geändert wird. In diesem Fall hat der effektive Einteilchen-Hamilton-Operator formal die Gestalt

$$\mathbf{P}_{2,+}^\nu (\mathbf{D}_2^\nu - V) \mathbf{P}_{2,+}^\nu. \quad (2.5.1)$$

Das nachfolgende Lemma gibt eine Klasse von Störungen  $V$  an, für welche dem Ausdruck (2.5.1) ein selbstadjungierter Operator zugeordnet werden kann. Außerdem wird die analoge Fragestellung für den dreidimensionalen Fall mit beantwortet. Für Zahlen und selbstadjungierte Operatoren wird die Notation  $x_\pm := \max\{\pm x, 0\}$  für den Positiv- und Negativteil von  $x$  verwendet.

**Lemma 2.5.1** (Korollar 2 in [49] und Lemma I.5 in [50]). *Seien  $(\nu, \gamma) \in ([0, (n-1)/2] \times [0, \infty)) \setminus \{((n-1)/2, 0)\}$  und  $V$  eine messbare, hermitesche  $N \times N$ -Matrixfunktion mit  $\text{Sp}(V_+^{n+\gamma}) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , sodass ein  $C > 0$  mit*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle v(\mathbf{x}), V_-(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \leq C \left( \| |\mathbf{D}_n^\nu|^{1/2} v \|^2 + \|v\|^2 \right) \quad (2.5.2)$$

*für alle  $v \in P_{n,+}^\nu \mathfrak{D}(|\mathbf{D}_n^\nu|^{1/2})$  existiert. Dann ist die quadratische Form*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n^\nu(V) &: P_{n,+}^\nu \mathfrak{D}(|\mathbf{D}_n^\nu|^{1/2}) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{f}_n^\nu(V)[v] &:= \| |\mathbf{D}_n^\nu|^{1/2} v \|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \langle v(\mathbf{x}), V(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \end{aligned}$$

*abgeschlossen und nach unten beschränkt in  $\mathfrak{H}_{n,+}^\nu := P_{n,+}^\nu \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$ .*

Nach Satz 10.1.2 in [3] gibt es einen eindeutigen selbstadjungierten Operator  $\mathbf{F}_n^\nu(V)$  in  $\mathfrak{H}_{n,+}^\nu$ , welcher  $\mathbf{f}_n^\nu(V)$  zugeordnet werden kann. In den nachfolgenden Sätzen werden Aussagen über das negative Spektrum von  $\mathbf{F}_n^\nu(V)$  gemacht. Dazu sei noch angemerkt, dass die Eigenwerte von  $\mathbf{F}_2^\nu(V)$  als die gebundenen Zustände eines Quantenpunktes in verunreinigtem Graphen interpretiert werden können.

**Satz 2.5.2** (Satz 3 in [49] und Satz I.6 (a) in [50]). *Seien  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  und die Konstanten  $C_n^{1/2,\Delta}$  und  $C_n^\nu$  wie in (2.5.5) und in Satz 2.3.1 definiert. Es gilt die Ungleichung*

$$\text{Rang}(\mathbf{F}_n^\nu(V))_- \leq C_n^{1/2,\Delta} (C_n^\nu)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \text{Sp}(V_+(\mathbf{x}))^n d\mathbf{x}. \quad (2.5.3)$$

Analogien von Satz 2.5.2 sind für viele nach unten beschränkte selbstadjungierte Operatoren als Cwikel-Lieb-Rozenblum-Ungleichung [59, 14, 47] bekannt. Einen guten Überblick über weitere Entwicklungen und wichtige Referenzen in diesem Zusammenhang kann man in [30] finden. Insbesondere wird in Beispiel 3.3 in [30] die Abschätzung

$$\text{Rang}((-\Delta)^t - V)_- \leq C_n^{t,\Delta} \int_{\mathbb{R}^n} \text{Sp}(V_+(\mathbf{x}))^{n/(2t)} d\mathbf{x} \quad (2.5.4)$$

mit

$$C_n^{t,\Delta} := \frac{1}{4\pi^{n-1}t} \left( \frac{n}{n-2t} \right)^{(n-t)/t} \quad (2.5.5)$$

für alle  $0 < t < n/2$  bewiesen. Der Beweis von Satz 2.5.2 beruht auf Satz 2.3.1 und (2.5.4).

**Satz 2.5.3** (Satz 4 in [49] und Satz I.6 (b) in [50]). *Seien  $\nu \in [0, (n-1)/2]$ ,  $\gamma > 0$  und die Konstanten  $C_n^\nu$ ,  $C_n^{\lambda,\Delta}$  und  $K_n^\lambda$  wie in Satz 2.3.1, (2.5.5) und Satz 2.3.4 definiert. Es gilt die Ungleichung*

$$\text{Sp}(\mathbf{F}_n^\nu(V))_-^\gamma \leq C_{n,\gamma}^{\nu,\text{LT}} \int_{\mathbb{R}^n} \text{Sp}(V_+(\mathbf{x}))^{n+\gamma} d\mathbf{x} \quad (2.5.6)$$

mit

$$C_{n,\gamma}^{\nu,\text{LT}} := \frac{n! C_n^{1/2,\Delta} (C_n^\nu)^{-n}}{\prod_{k=1}^n (\gamma + k)} \quad \text{für } \nu < (n-1)/2, \quad (2.5.7)$$

$$C_{n,\gamma}^{\frac{n-1}{2},\text{LT}} := \min_{\lambda \in (n/(n+\gamma), 1)} \frac{\gamma^{1+\gamma} \lambda^\gamma \Gamma(1+n/\lambda) \Gamma(n+\gamma-n/\lambda) C_n^{\frac{\lambda}{2},\Delta} (K_n^\lambda)^{-\frac{n}{\lambda}}}{\Gamma(n+1+\gamma) (n(1-\lambda))^{\frac{n(1-\lambda)}{\lambda}} ((n+\gamma)\lambda - n)^{n+\gamma-\frac{n}{\lambda}}}. \quad (2.5.8)$$

Die Ungleichungen (2.5.6) sind vom Typ der Lieb-Thirring-Ungleichungen [48]. Ein Überblick über Lieb-Thirring-Ungleichungen für Schrödinger-Operatoren wird in [44] präsentiert. In Korollar 2.6.6 wird gezeigt, dass  $\mathbf{F}_n^{(n-1)/2}(V)$  ein virtuelles Niveau bei null hat, d. h. einen negativen Eigenwert für alle nicht trivialen  $V \geq 0$ . Die Existenz eines virtuellen Niveaus wurde bereits für andere nach unten beschränkte selbstadjungierte Operatoren beobachtet, z. B. für den Operator  $\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{4r^2}\right)$  in  $L^2(\mathbb{R}_+)$  (siehe Proposition 3.2 in [23]). Dies bedeutet insbesondere, dass die Abschätzung (2.5.3) nicht für  $\nu = (n-1)/2$  gelten kann. Daher ist in diesem Fall (2.5.3) vom Typ einer Hardy-Lieb-Thirring-Ungleichung [23, 29, 32].

## 2.6 Über die Existenz der virtuellen Niveaus der projizierten Coulomb-Dirac-Operatoren

In Satz 2.5.2 wurden Abschätzungen vom Typ der Cwikel-Lieb-Rozenblum-Ungleichung auf die negativen Eigenwerte der gestörten positiv projizierten masselosen Coulomb-Dirac-Operatoren formuliert. Für die kritische Kopplungskonstante  $\nu = (n-1)/2$  kann dieses Ergebnis nicht bewiesen werden. Diese Tatsache legt die Vermutung nahe, dass ein virtuelles Niveau bei null existiert, d. h., dass jede nicht triviale negative Störung zu einem nicht leeren negativen Spektrum führt.

Die Untersuchung dieser Vermutung führt zur Betrachtung der Coulomb-Dirac-Operatoren auf der Halbachse  $\mathbb{R}_+$ , welche mit dem Differentialausdruck

$$d^{\nu,\kappa} := \begin{pmatrix} -\nu/r & -\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \\ \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} & -\nu/r \end{pmatrix} \quad (2.6.1)$$

verbunden sind. Hier ist  $\nu \in \mathbb{R}$  der Parameter für die Stärke des Coulomb-Potentials (Kernladung) und  $\kappa \in \mathbb{R}$  ist ein Parameter, welcher nach einer Drehimpulsanalzerlegung auftaucht [73]. Typischerweise nimmt  $\kappa$  ganzzahlige oder halbzahlige Werte an. Allerdings ist diese Annahme in den nachfolgenden Betrachtungen nicht notwendig. In diesem Abschnitt und in den Beweisen der hier aufgeführten Resultate wird die Kurzschreibweise

$$\Upsilon := \sqrt{\kappa^2 - \nu^2} \in \overline{\mathbb{R}_+} \cup i\mathbb{R}_+$$

verwendet. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass eine Fundamentallösung von  $d^{\nu,\kappa}\Psi^{\nu,\kappa} = 0$  eine Linearkombination von  $\Psi_M^{\nu,\kappa}$  und  $\Psi_U^{\nu,\kappa}$

ist, wobei

$$\Psi_M^{\nu,\kappa}(r) := \begin{cases} \kappa r^\Upsilon \begin{pmatrix} \kappa+\Upsilon \\ -\nu \end{pmatrix} & \text{für } \nu^2 \neq \kappa^2 \neq 0 \text{ und } \kappa \neq -\Upsilon, \\ \Upsilon r^\Upsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } \Upsilon = -\kappa \in \mathbb{R}_+, \\ \begin{pmatrix} -\nu \\ \kappa \end{pmatrix} & \text{für } \nu^2 = \kappa^2 \neq 0, \\ r^{-i\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} & \text{für } \kappa = 0, \end{cases} \quad (2.6.2)$$

und

$$\Psi_U^{\nu,\kappa}(r) := \begin{cases} r^{-\Upsilon} \begin{pmatrix} \nu \\ -\kappa-\Upsilon \end{pmatrix} & \text{für } \Upsilon \in \mathbb{R}_+ \text{ und } \kappa \neq -\Upsilon, \\ r^{-\Upsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } \Upsilon = -\kappa \in \mathbb{R}_+, \\ \kappa r^{-\Upsilon} \begin{pmatrix} \kappa-\Upsilon \\ -\nu \end{pmatrix} & \text{für } \Upsilon \in i\mathbb{R}_+ \text{ und } \kappa \neq 0, \\ \ln r \begin{pmatrix} -\nu \\ \kappa \end{pmatrix} - \frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} \nu \\ \kappa \end{pmatrix} & \text{für } \nu^2 = \kappa^2 \neq 0, \\ r^{i\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & \text{für } \kappa = 0, \end{cases} \quad (2.6.3)$$

ist.

### 2.6.1 Selbstadjungierte Realisierungen der Coulomb-Dirac-Operatoren auf der Halbachse

Im nächsten Satz wird eine Familie selbstadjungierter Realisierungen des Differentialausdrucks (2.6.1) in  $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  eingeführt. Dazu wird zuerst der symmetrische Operator  $\tilde{D}^{\nu,\kappa}$  als Realisierung von (2.6.1) auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  definiert. Dann ist die Wirkung von  $(\tilde{D}^{\nu,\kappa})^*$  auch durch (2.6.1) gegeben, aber auf dem “maximalen” Definitionsbereich

$$\mathfrak{D}((\tilde{D}^{\nu,\kappa})^*) = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) : f \in \text{AC}_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2), d^{\nu,\kappa} f \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)\}.$$

Weil keine der Funktionen (2.6.2), (2.6.3) in  $L^2((1, \infty))$  liegt, ist (2.6.1) immer im Grenzpunktfall bei unendlich. Für  $\Upsilon \geq 1/2$  ist  $\Psi_U^{\nu,\kappa}$  nicht Element von  $L^2((0, 1))$  und daher gilt Grenzpunktfall bei null. Ansonsten ist immer Grenzkreisfall bei null. Daher impliziert Satz 1.5 in [82]:

**Satz 2.6.1** (Satz 1.1 in [52]).

- (1) Für  $\Upsilon \in [0, 1/2)$  und  $\kappa \neq 0$  stimmt jede selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{D}^{\nu,\kappa}$  mit  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  für ein  $\theta \in [0, \pi)$  überein, wobei  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  die Einschränkung von  $(\tilde{D}^{\nu,\kappa})^*$  auf die Menge der Funktionen  $f \in \mathfrak{D}((\tilde{D}^{\nu,\kappa})^*)$  ist, welche die Randbedingung

$$\lim_{r \rightarrow +0} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f(r), \cos \theta \Psi_U^{\nu,\kappa}(r) + \sin \theta \Psi_M^{\nu,\kappa}(r) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} = 0 \quad (2.6.4)$$

erfüllen.

- (2) Für  $\Upsilon \geq 1/2$  ist der Operator  $\tilde{D}^{\nu,\kappa}$  wesentlich selbstadjungiert. Der Abschluss von  $\tilde{D}^{\nu,\kappa}$  wird in diesem Fall mit  $D_{\pi/2}^{\nu,\kappa}$  bezeichnet, da jedes  $f \in \mathfrak{D}(D_{\pi/2}^{\nu,\kappa})$  die Randbedingung (2.6.4) mit  $\theta := \pi/2$  erfüllt.
- (3) Für  $\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$  oder  $\kappa = 0$  stimmt jede selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{D}^{\nu,\kappa}$  mit  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  für ein  $\theta \in [0, \pi)$  überein, wobei  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  die Einschränkung von  $(\tilde{D}^{\nu,\kappa})^*$  auf die Menge der Funktionen  $f \in \mathfrak{D}((\tilde{D}^{\nu,\kappa})^*)$  ist, welche die Randbedingung

$$\lim_{r \rightarrow +0} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f(r), e^{i\theta} \Psi_U^{\nu,\kappa}(r) + e^{-i\theta} \Psi_M^{\nu,\kappa}(r) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} = 0 \quad (2.6.5)$$

erfüllen.

Die Menge der Triple  $(\nu, \kappa, \theta)$  für welche  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  in Satz 2.6.1 definiert ist, wird mit  $\mathfrak{M}$  bezeichnet.

In Abschnitt 3.11.1 wird für jedes  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$  eine spektrale Darstellung von  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  konstruiert, und zwar wird explizit ein unitärer Operator  $\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa}$  von  $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2, dr)$  nach  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}, dx)$  angegeben, sodass  $\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa} D_\theta^{\nu,\kappa} (\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa})^*$  der Multiplikationsoperator der unabhängigen Variable ist. Demnach ist für alle  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$  das Spektrum von  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  komplett absolut stetig, einfach und stimmt mit  $\mathbb{R}$  überein. Die Existenz und allgemeine Form der spektralen Darstellungen der eindimensionalen Dirac-Systeme ist bereits in Satz 9.7 in [83] bewiesen. Bei der Formulierung der spektralen Darstellung in diesem Resultat wird ein matrixwertiges Maß (Spektrum nicht notwendig einfach) verwendet, welches durch eine explizite Formel gegeben ist. Um daraus das Resultat in Abschnitt 3.11.1 zu schließen, muss noch mit großem Aufwand gezeigt werden, dass dieses Maß Rang eins hat und äquivalent zum Lebesgue-Maß ist. Der in Abschnitt 3.11.1 angegebene Beweis ist keine direkte Anwendung dieses abstrakten Resultats, weil diese Anwendung aufwändiger erscheint als der dort gewählte Ansatz, welcher direkt auf  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  zugeschnitten ist. Ein ähnliches Resultat für Coulomb-Dirac-Operatoren mit positiver Masse kann in [76] gefunden werden.

### 2.6.2 Über virtuelle Niveaus der positiv projizierten masselosen Coulomb-Dirac-Operatoren auf der Halbachse

In diesem Abschnitt wird das negative Spektrum einer Störung der Einschränkung des Operators  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  auf seinen nichtnegativen spektralen Teilraum untersucht. Der Projektor auf den nichtnegativen Spektralbereich von  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  wird mit  $P_{\theta,+}^{\nu,\kappa}$  bezeichnet.

Sei  $Q$  eine messbare, hermitesche  $2 \times 2$ -Matrixfunktion auf  $\mathbb{R}_+$ . Für  $Q$  gelte:

**Hypothese 1.** *Der Operator  $P_{\theta,+}^{\nu,\kappa} Q P_{\theta,+}^{\nu,\kappa}$  ist relativ formbeschränkt bezüglich  $D_{\theta}^{\nu,\kappa}$  in  $P_{\theta,+}^{\nu,\kappa} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  mit relativer Schranke kleiner eins.*

Unter Hypothese 1 ist der Operator

$$F_{\theta}^{\nu,\kappa}(Q) := P_{\theta,+}^{\nu,\kappa}(D_{\theta}^{\nu,\kappa} - Q)P_{\theta,+}^{\nu,\kappa} \quad (2.6.6)$$

im Sinn der quadratischen Formen wohldefiniert und selbstadjungiert in  $P_{\theta,+}^{\nu,\kappa} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  nach dem KLMN-Satz (siehe z. B. Satz X.17 in [58]). Hypothese 1 ist trivialerweise für  $Q \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{2 \times 2})$  erfüllt.

Das Resultat über die Existenz der virtuellen Niveaus in null für  $F_{\theta}^{\nu,\kappa}(0)$  ist im nachfolgenden Satz formuliert.

Für  $2 \times 2$ -Matrizen sind deren Normen  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}$ , Beträge  $|\cdot|$  und Positivteil  $(\cdot)_+$  im spektralen Sinne definiert.

**Satz 2.6.2** (Satz 1.2 in [52]).

(I) Sei  $A_{\theta}^{\nu,\kappa} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}^2$  definiert durch

$$A_{\theta}^{\nu,\kappa}(r) := \begin{cases} e^{i\theta} r^{i\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + e^{-i\theta} r^{-i\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} & \text{für } \kappa = 0, \nu \in \mathbb{R}, \theta \in [0, \pi), \\ \begin{pmatrix} -\nu \\ \kappa \end{pmatrix} & \text{für } \kappa \neq 0, \Upsilon = 0, \theta = \pi/2, \\ e^{i\theta} r^{-\Upsilon} \kappa \begin{pmatrix} \kappa - \Upsilon \\ -\nu \end{pmatrix} + e^{-i\theta} r^{\Upsilon} \kappa \begin{pmatrix} \kappa + \Upsilon \\ -\nu \end{pmatrix} & \text{für } \kappa \neq 0, \Upsilon \in i\mathbb{R}_+, \theta \in [0, \pi), \\ r^{-\Upsilon} \begin{pmatrix} \nu \\ -\kappa - \Upsilon \end{pmatrix} & \text{für } \Upsilon \in (0, 1/2), \theta = 0. \end{cases} \quad (2.6.7)$$

Sei  $\mathfrak{M}_I$  die Bezeichnung für die Menge aller Tripel  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$ , welche auf der rechten Seite von (2.6.7) stehen. Für jedes  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}_I$  wird angenommen, dass  $Q$  die Bedingungen

$$\|Q\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+, r^{2-2\operatorname{Re} \Upsilon} dr) \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \langle A_{\theta}^{\nu,\kappa}(r), |Q(r)| A_{\theta}^{\nu,\kappa}(r) \rangle_{\mathbb{C}^2} dr < \infty \quad (2.6.8)$$

erfüllt. Dann ist das negative Spektrum von  $F_{\theta}^{\nu,\kappa}(Q)$  nicht leer, wenn

$$\int_0^\infty \langle A_{\theta}^{\nu,\kappa}(r), Q(r) A_{\theta}^{\nu,\kappa}(r) \rangle_{\mathbb{C}^2} dr > 0 \quad (2.6.9)$$

gilt. Die Bedingung (2.6.9) wird von allen  $Q \geq 0$  erfüllt, welche punktweise positiv definit auf einer Menge mit positiven Lebesgue-Maß sind. Daher hat für  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}_I$  der Operator  $F_{\theta}^{\nu,\kappa}(0)$  ein virtuelles Niveau in null.



(II) Sei  $\mathfrak{M}_{\text{II}}$  die Menge der  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$ , für welche entweder  $\Upsilon > 0$  und  $\theta = \pi/2$  oder  $\Upsilon \in (0, 1/2)$  und  $\theta \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$  gilt. Für alle  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}_{\text{II}}$  und jedes  $q \in (1, 1 + 2\Upsilon)$  gibt es ein  $C_q^{\nu, \kappa} > 0$ , sodass

$$\text{Rang} (F_{\theta}^{\nu, \kappa}(Q))_- \leq C_q^{\nu, \kappa} \int_0^\infty \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}^q W_{\theta, q}^{\nu, \kappa}(r) dr \quad (2.6.10)$$

mit

$$W_{\theta, q}^{\nu, \kappa}(r) := \begin{cases} |\cot \theta|^{1+(q-1)/(2\Upsilon)} r^{-2\Upsilon} & \text{für } r \leq |\cot \theta|^{1/(2\Upsilon)}, \\ r^{q-1} & \text{für } r \geq |\cot \theta|^{1/(2\Upsilon)}, \end{cases} \quad (2.6.11)$$

gilt. Dementsprechend hat für jedes  $Q$ , für welches die rechte Seite von (2.6.10) endlich ist, der Operator  $F_{\theta}^{\nu, \kappa}(\alpha Q)$  kein negatives Spektrum, wenn  $\alpha > 0$  klein genug ist. Die Endlichkeit der rechten Seite von (2.6.10) impliziert, dass Hypothese 1 für  $Q := Q_+$  erfüllt ist.

(III) Sei  $\mathfrak{M}_{\text{III}}$  die Menge der  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$ , für welche  $\kappa^2 = \nu^2 \neq 0$  und  $\theta \in [0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$  gilt. Für alle  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}_{\text{III}}$  gibt es eine endliche Konstante  $K^{\nu, \kappa}$ , welche unabhängig von  $\theta$  ist, sodass für alle  $Q_+ \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{2 \times 2})$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \text{Rang} (F_{\theta}^{\nu, \kappa}(Q))_- \\ & \leq K^{\nu, \kappa} \int_0^\infty \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} \left( \ln^2(e^{\tan \theta} r) + \ln^2(e + 2r \|Q_+\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{2 \times 2})}) \right) dr \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

gilt. Erneut gilt, dass die Endlichkeit der rechten Seite in (2.6.12) impliziert, dass der Operator  $F_{\theta}^{\nu, \kappa}(\alpha Q)$  kein negatives Spektrum hat, wenn  $\alpha > 0$  klein genug ist.

Die Menge der Parameter  $\mathfrak{M}$  ist die disjunkte Vereinigung von  $\mathfrak{M}_{\text{I}}$ ,  $\mathfrak{M}_{\text{II}}$  und  $\mathfrak{M}_{\text{III}}$ .

Die Frage nach der Existenz der virtuellen Niveaus in null wurde bereits für andere selbstadjungierte Operatoren untersucht, siehe z. B. [64, 80].

### 2.6.3 Lieb-Thirring-artige Abschätzungen auf die negativen Eigenwerte von $F_{\theta}^{\nu, \kappa}(Q)$

In Satz 2.6.3 werden Abschätzungen auf die Summe der Potenzen der negativen Eigenwerte von  $F_{\theta}^{\nu, \kappa}(Q)$  durch gewichtete Integrale von Potenzen von

$Q_+$  formuliert. Im Fall  $\theta = \pi/2$  ist die Art der oberen Schranke die gleiche wie in der klassischen Lieb-Thirring-Ungleichung (Siehe [48] für das originale Resultat und [44, 31] für einen Überblick über weitere Entwicklungen auf diesem Gebiet.).

**Satz 2.6.3** (Satz 1.3 in [52]).

(a) Für  $\nu, \kappa \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in [0, \pi)$  ist  $W_\theta^{\nu, \kappa} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  gegeben durch

$$W_\theta^{\nu, \kappa}(r) := \begin{cases} 1 & \begin{cases} \text{für } \nu^2 = \kappa^2 \neq 0 \text{ und } \theta = \pi/2, \\ \text{für } \Upsilon \in i\mathbb{R}_+ \text{ und } \theta \in [0, \pi), \\ \text{für } \kappa = 0, \nu \in \mathbb{R} \text{ und } \theta \in [0, \pi), \end{cases} \\ \max \{ -\ln(e^{\tan \theta} r), 1 \}^2 & \text{für } \nu^2 = \kappa^2 \neq 0 \text{ und } \theta \in [0, \pi) \setminus \{\pi/2\}, \\ \max \{ 1, |\cot \theta| r^{-2\Upsilon} \} & \begin{cases} \text{für } \Upsilon \in (0, 1/2) \text{ und } \theta \in (0, \pi), \\ \text{für } \Upsilon \geq 1/2 \text{ und } \theta = \pi/2. \end{cases} \end{cases} \quad (2.6.13)$$

Dann gibt es für jedes  $\gamma > 0$  ein  $K^{\nu, \kappa, \gamma} > 0$ , sodass die Ungleichung

$$\mathrm{Sp} \left( F_\theta^{\nu, \kappa}(Q)_-^\gamma \right) \leq K^{\nu, \kappa, \gamma} \int_0^\infty \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}^{1+\gamma} W_\theta^{\nu, \kappa}(r) \, dr \quad (2.6.14)$$

gilt.

(b) Für  $\Upsilon \in (0, 1/2)$  und jedes  $\gamma > 2\Upsilon$  gibt es ein  $K^{\nu, \kappa, \gamma} > 0$ , sodass

$$\begin{aligned} & \mathrm{Sp} \left( F_0^{\nu, \kappa}(Q)_-^\gamma \right) \\ & \leq K^{\nu, \kappa, \gamma} \left( \int_0^\infty \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}^{1+\gamma-2\Upsilon} r^{-2\Upsilon} \, dr + \int_0^\infty \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}^{1+\gamma} \, dr \right) \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

gilt.

In beiden Fällen impliziert die Endlichkeit der rechten Seite in (2.6.14) oder (2.6.15), dass  $Q := Q_+$  Hypothese 1 erfüllt.

#### 2.6.4 Zusammenfassung der Resultate über $F_\theta^{\nu, \kappa}(Q)$

Die Resultate der Sätze 2.6.2 und 2.6.3 werden in der nachfolgenden Tabelle dargestellt:

	$\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$	$\Upsilon = 0 = \kappa$	$\Upsilon = 0 \neq \kappa$	$\Upsilon \in (0, 1/2)$	$\Upsilon \geq 1/2$
$\theta = 0$	Ia1	Ia1	IIIa	Ib	—
$\theta = \pi/2$	Ia1	Ia1	Ia1	IIa1	IIa1
$\theta \in (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$	Ia1	Ia1	IIIa	IIa	—

Tabelle - Zusammenfassung der Resultate

In dieser Tabelle zeigen die römischen Zahlen den anwendbaren Teil von Satz 2.6.2 an, die Buchstaben den zugehörigen Teil von Satz 2.6.3 und “1” zeigt an, dass (2.6.14) mit  $W_\theta^{\nu, \kappa} \equiv 1$  gilt. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass für  $\Upsilon \geq 1/2$  der Operator  $\tilde{D}^{\nu, \kappa}$  wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  ist und daher  $\theta = \pi/2$  nach Satz 2.6.1 Teil (2) die einzige selbstadjungierte Realisierung ist. Im Fall “Ia1” ist die Ungleichung (2.6.14) von der Art einer Hardy-Lieb-Thirring-Ungleichung [23, 29, 32].

### 2.6.5 Anwendung auf die projizierten masselosen Coulomb-Dirac-Operatoren

Um die Frage zu beantworten, welche am Anfang des Abschnitts gestellt wurde, werden nun die bereits gewonnenen Resultate auf die masselosen Coulomb-Dirac-Operatoren in zwei und drei Dimensionen angewendet. Für die Drehimpulskanalzerlegung in  $n$  Dimensionen wird eine Orthonormalbasis in  $L^2(\mathbb{S}^{N/2}; \mathbb{C}^{N/2})$  verwendet. Für  $n = 2$  ist diese Orthonormalbasis gleich  $((2\pi)^{-1/2} e^{ik(\cdot)})_{k \in \mathbb{Z}}$  und in drei Dimensionen werden die Spin-wertigen Kugelflächenfunktionen  $\Omega_{l,m,s}$  benutzt. Diese werden in Relation (7) in [27] für  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \in \{-l - 1/2, \dots, l + 1/2\}$  und  $s \in \{-1/2, 1/2\}$  definiert. Die entsprechenden Indexmengen werden mit

$$\mathfrak{T}_2 := \mathbb{Z} \quad (2.6.16)$$

und

$$\mathfrak{T}_3 := \left\{ (l, m, s) : l \in \mathbb{N}_0, m \in \left\{ -l - \frac{1}{2}, \dots, l + \frac{1}{2} \right\}, s = \pm \frac{1}{2}, \Omega_{l,m,s} \neq 0 \right\} \quad (2.6.17)$$

bezeichnet. Jedes  $\chi \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$  kann in Polarkoordinaten  $(\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$  und jedes  $\zeta \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$  in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi) \in [0, \infty) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$  als

$$\chi(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \sum_{k \in \mathfrak{T}_2} (2\pi \rho)^{-1/2} \chi_k(\rho) e^{ik\varphi}, \quad (2.6.18)$$

$$\zeta(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) = \sum_{(l,m,s) \in \mathfrak{T}_3} r^{-1} \zeta_{(l,m,s)}(r) \Omega_{l,m,s}(\theta, \phi) \quad (2.6.19)$$

mit

$$\chi_k(\rho) := \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^{2\pi} \chi(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad (2.6.20)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{(l,m,s)}(r) := r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi & \langle \Omega_{l,m,s}(\theta, \phi), \zeta(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) \rangle_{\mathbb{C}^2} \\ & \times \sin(\theta) d\theta d\phi \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

dargestellt werden. Mit der Hilfe von (2.6.20) und (2.6.21) werden die unitären Operatoren

$$\mathcal{A}_2 : L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathfrak{T}_2} L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2), \quad \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \bigoplus_{k \in \mathfrak{T}_2} \begin{pmatrix} \chi_k \\ \psi_{k+1} \end{pmatrix} \quad (2.6.22)$$

und

$$\mathcal{A}_3 : L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \rightarrow \bigoplus_{(l,m,s) \in \mathfrak{T}_3} L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2), \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \mapsto \bigoplus_{(l,m,s) \in \mathfrak{T}_3} \begin{pmatrix} \psi_{(l,m,s)}^+ \\ \psi_{(l+2s,m,-s)}^- \end{pmatrix} \quad (2.6.23)$$

mit

$$\psi_{(l,m,s)}^+ := \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_{(l,m,s)} \quad \text{und} \quad \psi_{(l,m,s)}^- := \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}_{(l,m,s)} \quad (2.6.24)$$

für  $(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3$  definiert. Für  $k \in \mathfrak{T}_2$  und  $(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3$  wird

$$\begin{aligned} \varkappa_k &:= k + 1/2, \\ \varkappa_{(l,m,s)} &:= 2sl + s + 1/2 \end{aligned} \quad (2.6.25)$$

definiert. Es kann gezeigt werden, dass für jede selbstadjungierte Realisierung eines  $n$ -dimensionalen masselosen Coulomb-Dirac-Operators in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  eine Abbildung

$$\boldsymbol{\theta}_n : \mathfrak{T}_n \rightarrow [0, \pi) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\theta}_n(j) = \pi/2 \quad \text{für alle} \quad \varkappa_j^2 \geq \nu^2 + 1/4 \quad (2.6.26)$$

existiert, sodass die erwähnte selbstadjungierte Realisierung mit

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu := (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} D_{\boldsymbol{\theta}_n(j)}^{\nu, \varkappa_j} \right) \mathcal{A}_n \mathcal{S}_n \quad (2.6.27)$$

übereinstimmt (siehe z. B. [53]), wobei  $\mathcal{S}_n$  durch

$$\mathcal{S}_n := \text{diag}(1, i) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{N/2}} \quad (2.6.28)$$

gegeben ist. Auf der anderen Seite wird für jedes  $\boldsymbol{\theta}_n$ , welches (2.6.26) genügt, eine selbstadjungierte Realisierung eines masselosen Coulomb-Dirac-Operators in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  durch (2.6.27) definiert.

Sei  $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n, +}^\nu := (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* (\bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} P_{\boldsymbol{\theta}_n(j), +}^{\nu, \kappa_j}) \mathcal{A}_n \mathcal{S}_n$  der Projektor auf den positiven spektralen Teilraum von  $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu$ . Für messbare, hermitesche  $N \times N$ -Matrixfunktionen  $V$  auf  $\mathbb{R}^n$  untersuchen wir das negative Spektrum von

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu(V) := \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n, +}^\nu (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu - V) \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n, +}^\nu \quad (2.6.29)$$

in  $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n, +}^\nu L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$ . Über  $V$  wird folgende zusätzliche Annahme getroffen:

**Hypothese 2.** *Der Operator  $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n, +}^\nu V \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n, +}^\nu$  ist relativ formbeschränkt bezüglich  $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu$  in  $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n, +}^\nu L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  mit einer relativen Schranke kleiner eins.*

Nach Hypothese 2 ist der Operator (2.6.29) durch seine quadratische Form wohldefiniert und selbstadjungiert durch den KLMN-Satz. Hypothese 2 ist für alle  $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  erfüllt. Falls  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  und  $\boldsymbol{\theta}_n(j) = \pi/2$  für alle  $j \in \mathfrak{T}_n$  gilt, dann stimmen die Definitionen von  $\mathbf{D}_n^\nu$  (siehe Abschnitt 2.2) und  $\mathbf{F}_n^\nu(V)$  (siehe Abschnitt 2.5) mit  $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu$  und  $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu(V)$  überein.

Zunächst geben wir einen Satz an, welcher ein Kriterium dafür bereit stellt, dass kein virtuelles Niveau existiert.

**Satz 2.6.4** (Verallgemeinerung von Satz 1.4(2) in [52] für  $n = 2$ ). *Sei  $\nu \in \mathbb{R}$ . Für alle  $j \in \mathfrak{T}_n$  gelte, dass  $(\nu, \kappa_j, \boldsymbol{\theta}_n(j))$  nicht in  $\mathfrak{M}_I$  liegt. Falls eine Funktion  $R \in L^\infty(\mathbb{R}_+, r dr) + L^n(\mathbb{R}_+, r^{n-1} dr)$  mit*

$$V \leq R(|\cdot|) \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N} \quad \text{fast überall in } \mathbb{R}^n \quad (2.6.30)$$

existiert, sodass:

- (i) *Für alle  $j \in \mathfrak{T}_n$  mit  $\kappa_j^2 \leq \nu^2 + 1/4$  und  $(\nu, \kappa_j, \boldsymbol{\theta}_n(\kappa_j)) \in \mathfrak{M}_{II}$  es ein  $q \in (1, 1+2Y)$  gibt, sodass die rechte Seite von (2.6.10) mit  $Q := R \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  und  $W_{\boldsymbol{\theta}_n, q}^{\nu, \kappa_j}$  (definiert in (2.6.11)) endlich ist;*
- (ii) *Für alle  $j \in \mathfrak{T}_n$  mit  $\kappa_j^2 \leq \nu^2 + 1/4$  und  $(\nu, \kappa_j, \boldsymbol{\theta}_n(\kappa_j)) \in \mathfrak{M}_{III}$  gilt, dass  $R \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$  und die rechte Seite von (2.6.12) mit  $Q := R \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  endlich ist;*

*dann existiert ein  $\alpha_c > 0$ , sodass für alle  $\alpha \in [0, \alpha_c)$  der Operator  $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu(\alpha V)$  kein negatives Spektrum hat. Die Bedingungen auf  $V$  sind für alle  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  erfüllt.*

Für  $(n, \nu) \in (\{2\} \times [0, 1/2)) \cup (\{3\} \times [\sqrt{3}/2, 1))$  gibt die Anwendung von Satz 2.6.4 zur Analyse der Existenz eines virtuellen Niveaus von  $\mathbf{D}_n^\nu$  eine schwächere Aussage als Satz 2.5.2. Diese Behauptung folgt aus der nachfolgenden Betrachtung. Nach Satz 2.6.4 gibt es für  $V := R(|\cdot|)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  mit  $R$  radialsymmetrisch und nichtnegativ ein  $\alpha > 0$ , sodass das negative Spektrum von  $\mathbf{F}_n^\nu(\alpha V)$  leer ist, falls  $R \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, r dr) + \mathbf{L}^n(\mathbb{R}_+, r^{n-1} dr)$  und

$$\int_0^\infty R^q(r) r^{q-1} dr < \infty \quad \text{für ein } q \in (1, 1 + 2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2})$$

gilt. In diesem Fall gibt es aber  $R_1 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, r dr)$ ,  $R_2 \in \mathbf{L}^n(\mathbb{R}_+, r^{n-1} dr)$  mit  $R_1, R_2 \geq 0$  und  $R = R_1 + R_2$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \text{Sp}(V_+(\mathbf{x})^n) d\mathbf{x} &= N 2^{n-1} \pi \int_0^\infty (R_1(r) + R_2(r))^n r^{n-1} dr \\ &\leq N 2^{2(n-1)} \pi (\|R_1\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, r dr)}^{n-q} \int_0^\infty R_1^q(r) r^{q-1} dr + \int_0^\infty R_2^n(r) r^{n-1} dr) < \infty. \end{aligned}$$

Dementsprechend impliziert (2.5.3) für eine größere Klasse von  $V$ , dass das negative Spektrum von  $\mathbf{F}_n^\nu(\alpha V)$  für hinreichend kleine nichtnegative  $\alpha$  leer ist.

Eine Bedingung für die Existenz eines virtuellen Niveaus wird im nachfolgenden Satz angegeben.

**Satz 2.6.5** (Verallgemeinerung von Satz 1.4(1) in [52] für  $n = 2$ ). *Sei  $\nu \in \mathbb{R}$ . Es existiere ein  $j \in \mathfrak{T}_n$ , sodass  $(\nu, \varkappa_j, \boldsymbol{\theta}_n(j)) \in \mathfrak{M}_\mathbf{I}$  (definiert in Satz 2.6.2) gelte.*

(a) *Dann hat  $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_2}^\nu(V)$  ein nicht leeres negatives Spektrum, falls*

$$Q(\rho) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} V_{11}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) & -iV_{12}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)e^{i\varphi} \\ iV_{21}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)e^{-i\varphi} & V_{22}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \end{pmatrix} d\varphi \quad (2.6.31)$$

*die Bedingungen (2.6.8) und (2.6.9) mit  $(\nu, \kappa, \theta) := (\nu, \varkappa_j, \boldsymbol{\theta}_2(j))$  erfüllt.*

(b) *Für  $n = 3$  wird in den Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  die  $4 \times 4$ -Matrix  $V$  in die folgenden vier  $2 \times 2$ -Blockmatrizen*

$$V(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) =: \begin{pmatrix} V_{\mathbf{I}, \mathbf{I}}(r, \theta, \phi) & V_{\mathbf{I}, \mathbf{II}}(r, \theta, \phi) \\ V_{\mathbf{II}, \mathbf{I}}(r, \theta, \phi) & V_{\mathbf{II}, \mathbf{II}}(r, \theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (2.6.32)$$

eingeteilt. Dann hat  $\mathbf{F}_{\theta_3}^\nu(V)$  ein nicht leeres negatives Spektrum, falls

$$Q_j(r) := \int_0^\pi \int_0^{2\pi} G_j(r, \theta, \phi) d\phi \sin \theta d\theta \quad (2.6.33)$$

mit

$$G_j := \begin{pmatrix} \langle \Omega_j, Q_{I,I} \Omega_j \rangle & \langle \Omega_j, Q_{I,II} \Omega_{(j_1+2j_3, j_2, -j_3)} \rangle \\ \langle \Omega_{(j_1+2j_3, j_2, -j_3)}, Q_{II,I} \Omega_j \rangle & \langle \Omega_{(j_1+2j_3, j_2, -j_3)}, Q_{II,II} \Omega_{(j_1+2j_3, j_2, -j_3)} \rangle \end{pmatrix} \quad (2.6.34)$$

die Bedingungen (2.6.8) und (2.6.9) mit  $(\nu, \kappa, \theta) := (\nu, \kappa_j, \theta_3(j))$  erfüllt.

Satz 2.6.5 impliziert das nachfolgende Korollar.

**Korollar 2.6.6** (Korollar 1.5 in [52] und Satz I.7 in [50]).

(a) Für  $n = 2$  sei  $Q$  definiert wie in (2.6.31). Falls die Bedingungen

$$\|Q\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} \in L^1(\mathbb{R}_+, (1 + \rho^2) d\rho), \int_0^\infty \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^m \end{pmatrix}, |Q(\rho)| \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^m \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} d\rho < \infty$$

und

$$\int_0^\infty \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^m \end{pmatrix}, Q(\rho) \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^m \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} d\rho > 0$$

für  $m = 0$  oder  $m = 1$  gelten, dann hat der Operator  $\mathbf{F}_2^{1/2}(V)$  mindestens einen negativen Eigenwert.

(b) Für  $n = 3$  seien die Blockmatrizen von  $V$  in Kugelkoordinaten definiert wie in (2.6.32). Zunächst werden die  $2 \times 2$ -Matrixfunktionen

$$\begin{aligned} A_{(-1,-1)}(r, \theta, \phi) &:= \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_{I,I} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, V_{I,II} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, V_{II,I} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, V_{II,II} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix}, \\ A_{(1,-1)}(r, \theta, \phi) &:= \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_{I,I} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, V_{I,II} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, V_{II,I} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, V_{II,II} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix}, \\ A_{(-1,1)}(r, \theta, \phi) &:= \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, V_{I,I} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}, V_{I,II} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}, V_{II,I} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_{II,II} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix}, \\ A_{(1,1)}(r, \theta, \phi) &:= \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, V_{I,I} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, V_{I,II} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}, V_{II,I} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_{II,II} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eingeführt, wobei  $V_{p,q}$  mit  $p, q \in \{I, II\}$  am Punkt  $(r, \theta, \phi)$  ausgewertet wird. Für  $\mathbf{j} \in \{-1, 1\}^2$  und  $r > 0$  sei

$$Q_{\mathbf{j}}(r) := \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{\mathbf{j}}(r, \theta, \phi) d\phi \sin \theta d\theta.$$

Falls für ein  $\mathbf{j} \in \{-1, 1\}^2$  die Bedingungen

$$\|Q_{\mathbf{j}}\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} \in L^1(\mathbb{R}_+, r^2 dr), \quad \int_0^\infty \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ j_2 \end{pmatrix}, |Q_{\mathbf{j}}(r)| \begin{pmatrix} 1 \\ j_2 \end{pmatrix} \right\rangle dr < \infty \quad (2.6.35)$$

und

$$\int_0^\infty \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ j_2 \end{pmatrix}, Q_{\mathbf{j}}(r) \begin{pmatrix} 1 \\ j_2 \end{pmatrix} \right\rangle dr > 0 \quad (2.6.36)$$

gelten, dann hat der Operator  $\mathbf{F}_3^1(V)$  mindestens einen negativen Eigenwert.

Insbesondere hat  $\mathbf{F}_n^{(n-1)/2}(v\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  einen negativen Eigenwert für alle nicht trivialen stetigen Funktionen  $v \geq 0$ , welche schnell bei unendlich abfallen.



### 3 Beweise der Resultate

In Kapitel 2 sind Lemmata, Korollare und Sätze mit einer genauen Quellenangabe formuliert. Unter diesen Quellenangaben kann man auch die Beweise dieser Resultate finden. In diesem Abschnitt führen wir diese Beweise in modifizierter Form aus und geben zusätzlich bei umfangreicheren Beweisen eine Beweisidee oder Gliederung des Beweises an. Dabei verwenden wir die Definitionen, Notationen und Konventionen aus den Kapiteln 1 und 2.

#### 3.1 Beweis von Satz 2.1.1

Mit der Beweistechnik von Satz 1 in [35] kann die Ungleichung  $\lambda_k \leq \mu_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gezeigt werden. Daher muss nur noch die Ungleichung  $\lambda_k \geq \mu_k$  bewiesen werden. Dazu wird die Beweisidee verwendet, welche im Beweis von Satz 1.1 in [18] benutzt wurde, aber es wird konsequent mit Formen anstatt mit Operatoren gearbeitet. Dabei sind die verwendeten Argumente abstrakte Versionen der Argumente in Abschnitt 4 in [19].

Zuerst führen wir die Sesquilinearformen

$$\mathbf{s} := \mathbf{q} + \mathbf{v} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{D}[\mathbf{q}] \quad (3.1.1)$$

und

$$\mathbf{s}_- : \mathfrak{D}_- \times \mathfrak{D}_- \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbf{s}_-[x_-, y_-] := -\mathbf{s}[x_-, y_-] \quad (3.1.2)$$

ein. Außerdem wird für  $u > a$  die Abbildung

$$\mathbf{m}_u : \mathfrak{D}_- \rightarrow [0, \infty), \quad \mathbf{m}_u[y_-] := \mathbf{s}_-[y_-] + u\|y_-\|^2 \quad (3.1.3)$$

definiert. Nach (2.1.7) sind  $\mathbf{m}_u^{1/2}$  äquivalente Normen in  $\mathfrak{D}_-$ . Die Vervollständigung von  $\mathfrak{D}_-$  in  $\mathfrak{H}$  bezüglich  $\mathbf{m}_{a+1}^{1/2}$  wird mit  $\overline{\mathfrak{D}_-}$  bezeichnet und die eindeutige stetige Fortsetzung von  $\mathbf{m}_u$  auf  $\overline{\mathfrak{D}_-}$  mit  $\overline{\mathbf{m}_u}$ . Weil  $\mathbf{s}_-$  stetig bezüglich  $\mathbf{m}_{a+1}$  ist, existiert die eindeutige stetige Fortsetzung  $\overline{\mathbf{s}_-}$  auf  $\overline{\mathfrak{D}_-} \times \overline{\mathfrak{D}_-}$ . Zusätzlich wird für  $x_+ \in \mathfrak{D}_+$  und  $u > a$  die Abbildung

$$d_{u,x_+} : \mathfrak{D}_- \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_{u,x_+}(y_-) := \mathbf{s}[x_+ + y_-] - u\|x_+ + y_-\|^2 \quad (3.1.4)$$

eingeführt. Dann gilt für  $u > a$  und  $x_+ \in \mathfrak{D}_+$

$$\sup_{y_- \in \mathfrak{D}_-} d_{u,x_+}(y_-) = \sup_{y_- \in \mathfrak{D}_-} (\mathbf{s}[x_+] - u\|x_+\|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathbf{s}[x_+, y_-] - \mathbf{m}_u[y_-]). \quad (3.1.5)$$

Da die Normen  $\mathbf{m}_u^{1/2}$  zueinander äquivalent sind, gilt

$$\sup_{y_- \in \mathfrak{D}_-} d_{u,x_+}(y_-) < \infty \text{ für } u > a \text{ genau dann, wenn } x_+ \in \mathfrak{S},$$

wobei

$$\mathfrak{S} := \left\{ x_+ \in \mathfrak{D}_+ : \sup_{y_- \in \mathfrak{D}_- \setminus \{0\}} \frac{|\mathbf{s}[x_+, y_-]|}{\mathbf{m}_{a+1}^{1/2}[y_-]} < \infty \right\} \subset \mathfrak{D}_+. \quad (3.1.6)$$

Für  $x_+ \in \mathfrak{S}$  und  $u > a$  kann  $\mathbf{s}[x_+, \cdot]$  zu einem linearen beschränkten Funktional  $s_{x_+}$  im Hilbertraum  $(\overline{\mathfrak{D}_-}, \overline{\mathbf{m}_u})$  fortgesetzt werden. Daher existiert nach dem Satz von Riesz ein eindeutiger linearer Operator

$$L_u : \mathfrak{S} \rightarrow \overline{\mathfrak{D}_-}, \text{ sodass } s_{x_+}(y_-) = \overline{\mathbf{m}_u}[L_u x_+, y_-] \text{ für alle } y_- \in \overline{\mathfrak{D}_-} \text{ gilt.} \quad (3.1.7)$$

Sei  $\overline{d_{u,x_+}}$  die eindeutige stetige Fortsetzung von  $d_{u,x_+}$  auf  $\overline{\mathfrak{D}_-}$  für  $x_+ \in \mathfrak{S}$ . Nach (3.1.5) gilt

$$\sup_{y_- \in \overline{\mathfrak{D}_-}} \overline{d_{u,x_+}}(y_-) = \mathbf{s}[x_+] - u\|x_+\|^2 + \overline{\mathbf{m}_u}[L_u x_+] - \inf_{y_- \in \overline{\mathfrak{D}_-}} \overline{\mathbf{m}_u}[L_u x_+ - y_-]. \quad (3.1.8)$$

Daher ist  $L_u x_+$  der eindeutige Maximierer in (3.1.8).

**Lemma 3.1.1** (Lemma 4 in [51]).

$$\lambda_k = \inf_{\substack{\mathfrak{V} \text{ Teilraum von } \mathfrak{S} \\ \dim \mathfrak{V} = k}} \sup_{x \in (\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{D}_-) \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{s}[x]}{\|x\|^2}. \quad (3.1.9)$$

*Beweis.* Falls es für  $x_+ \in \mathfrak{D}_+ \setminus \{0\}$  ein  $u \in (a, \infty)$  gibt, sodass

$$\sup_{x_- \in \mathfrak{D}_-} \frac{\mathbf{s}[x_+ + x_-]}{\|x_+ + x_-\|^2} < u$$

gilt, dann folgt aus (3.1.2) und (3.1.3)

$$0 > \sup_{y_- \in \mathfrak{D}_-} \frac{\mathbf{s}[x_+ + y_-] - u\|x_+ + y_-\|^2}{\|x_+ + y_-\|^2} \geq \frac{1}{\|x_+\|^2} \sup_{y_- \in \mathfrak{D}_-} d_{u,x_+}(y_-).$$

Aber dann gilt  $x_+ \in \mathfrak{S}$  und daher ist die rechte Seite in (2.1.9) gleich der rechten Seite in (3.1.9).  $\square$

Für  $u > a$  definieren wir

$$\mathbf{g}_u : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}_u[x_+] := \overline{d_{u,x_+}}(L_u x_+); \quad (3.1.10)$$

$$\mathbf{n}_u : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{n}_u[x_+] := \|x_+\|^2 + \|L_u x_+\|^2. \quad (3.1.11)$$

**Lemma 3.1.2** (Lemma 5 in [51]). *Angenommen (2.1.6) und (2.1.7) sind erfüllt. Für  $a < u < u'$  gilt*

$$\| \cdot \| \leq \mathbf{n}_{u'}^{1/2} \leq \mathbf{n}_u^{1/2} \leq \frac{u' - a}{u - a} \mathbf{n}_{u'}^{1/2}, \quad (3.1.12)$$

$$(u' - u)\mathbf{n}_{u'} \leq \mathbf{g}_u - \mathbf{g}_{u'} \leq (u' - u)\mathbf{n}_u. \quad (3.1.13)$$

Außerdem gilt für jedes  $u > a$ :

$$\lambda_1 > u \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathbf{g}_u[x_+] > 0 \quad \text{für alle } x_+ \in \mathfrak{S} \setminus \{0\}; \quad (3.1.14)$$

$$\lambda_1 \geq u \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathbf{g}_u[x_+] \geq 0 \quad \text{für alle } x_+ \in \mathfrak{S}. \quad (3.1.15)$$

Dies impliziert, dass die Bedingung (2.1.8) äquivalent ist zu:

$$(iii') \quad \text{Für einige } u > a \text{ ist } \mathbf{g}_u[x_+] \geq 0 \quad \text{für alle } x_+ \in \mathfrak{S}. \quad (3.1.16)$$

*Beweis.* Zuerst führen wir

$$B_-^\# : \overline{\mathfrak{D}_-} \rightarrow (\overline{\mathfrak{D}_-})^*, \quad (B_-^\# x_-)(y_-) := \overline{\mathbf{s}_-}[x_-, y_-] \quad (3.1.17)$$

und den Einbettungsoperator

$$J : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}^*, \quad (Jx)(y) := \langle x, y \rangle \quad (3.1.18)$$

ein. Nun zeigen wir, dass

$$\text{der Operator } B_-^\# + uJ : \overline{\mathfrak{D}_-} \rightarrow (\overline{\mathfrak{D}_-})^* \text{ für alle } u > a \text{ invertierbar ist.} \quad (3.1.19)$$

Die Injektivität folgt aus (2.1.7). Für jedes  $f \in (\overline{\mathfrak{D}_-})^*$  gibt es ein  $c_f > 0$ , sodass  $|f(y)| \leq c_f \overline{\mathbf{m}_u}^{1/2}(y)$  für alle  $y \in \overline{\mathfrak{D}_-}$  gilt. Daher existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz ein  $x_u \in \overline{\mathfrak{D}_-}$ , sodass

$$f(y) = \overline{\mathbf{m}_u}[x_u, y] = \overline{\mathbf{s}_-}[x_u, y] + u\langle x_u, y \rangle$$

für alle  $y \in \overline{\mathfrak{D}_-}$  gilt. Dies impliziert  $f(y) = ((B_-^\# + uJ)x_u)(y)$  für alle  $y \in \overline{\mathfrak{D}_-}$ , d. h.,  $B_-^\# + uJ : \overline{\mathfrak{D}_-} \rightarrow (\overline{\mathfrak{D}_-})^*$  ist surjektiv.

Da  $\overline{\mathbf{s}_-}$  eine dicht definierte, abgeschlossene und nach unten beschränkte Sesquilinearform in  $\mathfrak{H}_-$  ist, gibt es nach Friedrichs Fortsetzungssatz (siehe Satz X.23 in [58]) einen selbstadjungierten Operator  $B_-$  mit

$$\mathfrak{D}(B_-) := \{x \in \overline{\mathfrak{D}_-} : \text{Es gibt ein } \tilde{x} \in \mathfrak{H}_-, \quad (3.1.20)$$

$$\text{sodass } \langle \tilde{x}, y \rangle = \overline{\mathbf{s}_-}[x, y] \text{ für alle } y \in \overline{\mathfrak{D}_-} \text{ gilt.}\},$$

$$B_-x := \tilde{x} \quad \text{für } x \in \mathfrak{D}(B_-). \quad (3.1.21)$$

Aus (3.1.17) folgt

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(B_-) &= \{x \in \overline{\mathfrak{D}_-} : B_-^\# x \in \mathfrak{H}_-^* \subset (\overline{\mathfrak{D}_-})^*\}, \\ J(B_- x) &= B_-^\# x \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{D}(B_-).\end{aligned}$$

Für  $u' > u > a$  folgt durch die Verwendung des Spektralsatzes wie in Lemma 2.1 in [18] die Ungleichung

$$\|(B_- + u')^{-1}y\| \leq \|(B_- + u)^{-1}y\| \leq \frac{u' - a}{u - a} \|(B_- + u')^{-1}y\|$$

für alle  $y \in \mathfrak{H}_-$ . Wegen der Dichtheit von  $\mathfrak{H}_-$  in  $(\overline{\mathfrak{D}_-})^*$  folgt

$$\|(B_-^\# + u'J)^{-1}y\| \leq \|(B_-^\# + uJ)^{-1}y\| \leq \frac{u' - a}{u - a} \|(B_-^\# + u'J)^{-1}y\| \quad (3.1.22)$$

für alle  $y \in (\overline{\mathfrak{D}_-})^*$ . Nun führen wir (Wiederhole (3.1.7))

$$S_+^\# : \mathfrak{S} \rightarrow (\overline{\mathfrak{D}_-})^*, \quad (S_+^\# x_+)(y_-) := s_{x_+}(y_-) \quad (3.1.23)$$

ein. Nach (3.1.3), (3.1.17) und (3.1.19) erhalten wir

$$L_u x_+ = (B_-^\# + uJ)^{-1} S_+^\# x_+.$$

Diese Relation setzen wir in (3.1.22) ein und schlussfolgern

$$\|L_{u'} x_+\| \leq \|L_u x_+\| \leq \frac{u' - a}{u - a} \|L_{u'} x_+\| \quad \text{für alle } x_+ \in \mathfrak{S}.$$

In Kombination mit (3.1.11) impliziert dies (3.1.12). Die verbliebenen Aussagen können wie in Lemma 2.1 in [18] bewiesen werden, wobei jetzt die Rolle von  $F_+$  durch  $\mathfrak{S}$  gespielt wird und wir (3.1.9) anstelle von (2.1.8) benutzen.  $\square$

Für  $u > a$  sei der Hilbertraum  $(\mathfrak{X}, \overline{\mathbf{n}_u})$  die Vervollständigung von  $(\mathfrak{S}, \mathbf{n}_u)$ . In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass nach Lemma 3.1.2  $\mathfrak{X}$  in  $\mathfrak{H}_+$  liegt und nicht von  $u$  abhängt.

Nach (3.1.15) gilt  $\mathbf{g}_u[x_+] \geq 0$  für alle  $x_+ \in \mathfrak{S}$ , falls  $a < u \leq \lambda_1$ . Auf der anderen Seite erhalten wir für  $u \geq \lambda_1$  nach (3.1.13) und (3.1.12)

$$\mathbf{g}_u \geq \mathbf{g}_{\lambda_1} + (\lambda_1 - u)\mathbf{n}_{\lambda_1} \geq (\lambda_1 - u) \left( \frac{u - a}{\lambda_1 - a} \right)^2 \mathbf{n}_u.$$

Daher gilt für  $u > a$

$$\mathbf{g}_u \geq -c_u \mathbf{n}_u, \quad c_u := \max \left\{ 0, (u - \lambda_1) \left( \frac{u - a}{\lambda_1 - a} \right)^2 \right\}.$$

Jetzt definieren wir

$$\mathbf{h}_u : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{h}_u[x_+] := \mathbf{g}_u[x_+] + (c_u + 1)\mathbf{n}_u[x_+]. \quad (3.1.24)$$

Nun wollen wir zeigen, dass  $\mathbf{h}_u^{1/2}$  und  $\mathbf{h}_{u'}^{1/2}$  für  $u' > u > a$  äquivalente Normen sind. Nach (3.1.13) und (3.1.12) gilt

$$\mathbf{g}_u \leq \mathbf{g}_{u'} + (u' - u)\mathbf{n}_u \leq \mathbf{g}_{u'} + (u' - u) \left( \frac{u' - a}{u - a} \right)^2 \mathbf{n}_{u'}.$$

Dies impliziert  $\mathbf{h}_u \leq \mathbf{g}_{u'} + (1 + c_u + u' - u)(u' - a)^2(u - a)^{-2}\mathbf{n}_{u'}$  und die Existenz einer Konstante  $c_2(u, u')$ , sodass  $\mathbf{h}_u \leq c_2(u, u')\mathbf{h}_{u'}$  gilt. Nach Lemma 3.1.2 erhalten wir  $\mathbf{g}_u \geq \mathbf{g}_{u'} + (u' - u)\mathbf{n}_{u'}$  und dementsprechend  $\mathbf{h}_u \geq \mathbf{g}_{u'} + (u' - u + 1 + c_{u'})\mathbf{n}_{u'}$ , d. h., es gibt eine Konstante  $c_1(u, u') > 0$ , sodass  $\mathbf{h}_u \geq c_1(u, u')\mathbf{h}_{u'}$  gilt. Daher sind die Normen äquivalent.

Für  $u > a$  sei der Hilbertraum  $\mathfrak{G}_u = (\mathfrak{G}, \overline{\mathbf{h}_u})$  die Vervollständigung von  $(\mathfrak{G}, \mathbf{h}_u)$ . In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{X}$  nicht von  $u$  abhängt.

Die Fortsetzung von  $\mathbf{g}_u$  auf  $\mathfrak{G}$  wird mit  $\overline{\mathbf{g}_u}$  bezeichnet. Diese ist eine abgeschlossene, halbbeschränkte quadratische Form mit dem Definitionsbereich  $\mathfrak{G}$ . Nach Friedrichs Fortsetzungssatz gibt es einen eindeutigen selbstadjungierten Operator  $T_u : \mathfrak{D}(T_u) \subset \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  mit  $\mathfrak{D}(|T_u|^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{G}$ , sodass  $\overline{\mathbf{g}_u}[x_+] = \overline{\mathbf{n}_u}[x_+, T_u x_+]$  für alle  $x_+ \in \mathfrak{D}(T_u)$  gilt und  $\mathfrak{G}$  ein determinierender Bereich von  $|T_u|^{\frac{1}{2}}$  ist.

Das nachfolgende Lemma ist eine einfache Folgerung aus Courants Minimax-Prinzip.

**Lemma 3.1.3** (Lemma 6 in [51]). *Sei  $T$  ein selbstadjungierter und nach unten beschränkter Operator im Hilbertraum  $\mathfrak{X}$  mit der zugehörigen Sesquilinearform  $\mathfrak{t}$ . Wir definieren*

$$l_k(T) := \inf_{\substack{\mathfrak{Y} \text{ Teilraum von } \mathfrak{D}[\mathfrak{t}] \\ \dim \mathfrak{Y} = k}} \sup_{x \in \mathfrak{Y} \setminus \{0\}} \frac{\mathfrak{t}[x]}{\|x\|_{\mathfrak{X}}^2}, \quad (3.1.25)$$

$$w_k(T) := \text{Mächtigkeit von } \{k' \geq 1, l_{k'}(T) = l_k(T)\} \quad (3.1.26)$$

und

$$T^\# : \mathfrak{D}[\mathfrak{t}] \rightarrow \mathfrak{D}[\mathfrak{t}]^*, \quad (T^\# z)(v) := \mathfrak{t}[z, v] \quad \text{für alle } v, z \in \mathfrak{D}[\mathfrak{t}]. \quad (3.1.27)$$

Falls  $l_k(T) < \inf \sigma_{\text{ess}}(T)$ , dann ist  $l_k(T)$  ein Eigenwert von  $T$  mit Multiplizität  $w_k(T)$ . Daraus folgt, dass für einen determinierenden Bereich  $\mathfrak{C}$  von  $\mathfrak{t}$  eine

Folge  $(\mathfrak{Z}_l)_{l \in \mathbb{N}}$  von Teilmengen von  $\mathfrak{E}$  mit  $\dim \mathfrak{Z}_l = w_k(T)$  existiert, sodass (Wiederhole (3.1.18))

$$\sup_{\substack{z \in \mathfrak{Z}_l \\ \|z\|_{\mathfrak{X}}=1}} \left\| (T^\# - l_k(T)J)z \right\|_{\mathfrak{D}[\mathfrak{t}]^*} \rightarrow 0 \quad \text{für } l \rightarrow \infty \quad (3.1.28)$$

gilt.

Durch die Anwendung von Lemma 3.1.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} l_k(T_u) &= \inf_{\substack{\mathfrak{V} \text{ Teilraum von } \mathfrak{G} \\ \dim \mathfrak{V}=k}} \sup_{x_+ \in \mathfrak{V} \setminus \{0\}} \frac{\overline{\mathfrak{g}_u}[x_+]}{\overline{\mathfrak{n}_u}[x_+]}, \\ w_k(T_u) &= \text{Mächtigkeit von } \{k' \geq 1, l_{k'}(T_u) = l_k(T_u)\}. \end{aligned}$$

Falls  $l_k(T_u) < \inf \sigma_{\text{ess}}(T_u)$ , dann ist  $l_k(T_u)$  ein Eigenwert von  $T_u$  mit Multiplizität  $w_k(T_u)$ . Wie in Lemma 3.1.3 definieren wir für  $u > a$

$$T_u^\# : \mathfrak{G}_u \rightarrow \mathfrak{G}_u^*, \quad (T_u^\# z)(w) := \overline{\mathfrak{g}_u}[z, w] \quad \text{für alle } w, z \in \mathfrak{G}. \quad (3.1.29)$$

Genau wie im Beweis von Lemma 2.2 in [18] kann man unter der Verwendung von (3.1.9) das nachfolgende Lemma beweisen.

**Lemma 3.1.4** (Lemma 7 in [51]). *Seien (2.1.6), (2.1.7) und (2.1.8) erfüllt. Dann ist  $\lambda_k$  für jedes  $k \geq 1$  in  $(a, \infty)$  die eindeutige Lösung der nichtlinearen Gleichung*

$$l_k(T_\lambda) = 0. \quad (3.1.30)$$

Daher gilt  $\lambda_k = \lambda_{k'}$  genau dann, wenn  $l_{k'}(T_{\lambda_k}) = 0$ . Sei

$$w_k := \text{Mächtigkeit von } \{k' \geq 1 : \lambda_k = \lambda_{k'}\}. \quad (3.1.31)$$

Dann impliziert Lemma 3.1.3 die Existenz einer Folge von Teilräumen  $(\mathfrak{Z}_l)_{l \in \mathbb{N}}$  von  $\mathfrak{G}$  mit  $\dim \mathfrak{Z}_l = w_k$  für alle  $l \geq 1$  und

$$\sup_{\substack{x_+ \in \mathfrak{Z}_l \\ \mathfrak{n}_{\lambda_k}[x_+]=1}} \|T_{\lambda_k}^\# x_+\|_{\mathfrak{G}_{\lambda_k}^*} \rightarrow 0 \quad \text{für } l \rightarrow \infty. \quad (3.1.32)$$

Nach (2.1.7), (3.1.2) und (3.1.3) gilt  $(u - a)\|y_-\|^2 \leq \mathfrak{m}_u[y_-]$  für alle  $y_- \in \mathfrak{D}_-$ . Daher folgt aus (2.1.4)

$$|\mathfrak{s}[x, y_-]| \leq (u - a)^{-1/2} \|Bx\| \mathfrak{m}_u^{1/2}[y_-] \quad \text{für alle } y_- \in \mathfrak{D}_-, x \in \mathfrak{D}(B).$$

Wir erhalten daher für  $x \in \mathfrak{D}(B)$ ,  $y_- \in \mathfrak{D}_-$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{s}[\Lambda_+ x, y_-]| &\leq |\mathfrak{s}[x, y_-]| + |\mathfrak{s}[\Lambda_- x, y_-]| \\ &\leq (u - a)^{-1/2} \|Bx\| \mathfrak{m}_u^{1/2}[y_-] + |\mathfrak{m}_u[\Lambda_- x, y_-]| + |u \langle \Lambda_- x, y_- \rangle| \\ &\leq \left( \frac{\|Bx\|}{\sqrt{u - a}} + \mathfrak{m}_u^{1/2}[\Lambda_- x] + \frac{|u|}{\sqrt{u - a}} \|\Lambda_- x\| \right) \mathfrak{m}_u^{1/2}[y_-]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Lambda_+ \mathfrak{D}(B) \subset \mathfrak{S}. \quad (3.1.33)$$

Sei  $x_+ \in \mathfrak{S}$  und  $y_+ \in \Lambda_+ \mathfrak{D}(B)$ . Nach (3.1.29) gilt

$$(T_{\lambda_k}^\# x_+)(y_+) = \mathfrak{g}_{\lambda_k}[x_+, y_+]. \quad (3.1.34)$$

Aus (3.1.10), (3.1.4) und (3.1.7) erhalten wir

$$\mathfrak{g}_{\lambda_k}[x_+] = \mathfrak{s}[x_+] - \lambda_k \|x_+\|^2 + 2s_{x_+}(L_{\lambda_k} x_+) - \overline{\mathfrak{s}}_-[L_{\lambda_k} x_+] - \lambda_k \|L_{\lambda_k} x_+\|^2 \quad (3.1.35)$$

für alle  $x_+ \in \mathfrak{S}$ .

Für  $u > a$  definieren wir (Wiederhole (3.1.7))

$$E_u : \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{D}_- \rightarrow \overline{\mathfrak{D}_-}, \quad E_u x := L_u \Lambda_+ x - \Lambda_- x. \quad (3.1.36)$$

Sei  $x = x_+ \oplus x_- \in \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{D}_-$  und  $y = y_+ \oplus y_- \in (\Lambda_+ \mathfrak{D}(B) \oplus \Lambda_- \mathfrak{D}(B)) \cap \mathfrak{D}(B)$ .

Wegen (3.1.34) und (3.1.35) folgt:

$$\begin{aligned} &(T_{\lambda_k}^\# x_+)(y_+) \\ &= \mathfrak{s}[x_+, y_+] - \lambda_k \langle x_+, y_+ \rangle + 2s_{x_+}(L_{\lambda_k} y_+) - \overline{\mathfrak{s}}_-[L_{\lambda_k} x_+, L_{\lambda_k} y_+] \\ &\quad - \lambda_k \langle L_{\lambda_k} x_+, L_{\lambda_k} y_+ \rangle \\ &= \mathfrak{s}[x, y] - \mathfrak{s}[x_-, y] - \mathfrak{s}[x_+, y_-] + 2s_{x_+}(L_{\lambda_k} y_+) - \overline{\mathfrak{s}}_-[L_{\lambda_k} x_+, L_{\lambda_k} y_+] \\ &\quad - \lambda_k \langle x_+ + L_{\lambda_k} x_+, y_+ + L_{\lambda_k} y_+ \rangle. \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

Außerdem gilt

$$s_{y_+}(x_-) = \mathfrak{s}[y_+, x_-] = \mathfrak{s}[y, x_-] - \mathfrak{s}[y_-, x_-] = \langle By, x_- \rangle + \overline{\mathfrak{s}}_-[y_-, x_-].$$

Daraus folgt, dass die Relation

$$s_{y_+}(x_-) = \langle By, x_- \rangle + \overline{\mathfrak{s}}_-[y_-, x_-] \quad (3.1.38)$$

auch für  $x_- \in \overline{\mathfrak{D}_-}$  gelten muss. Außerdem gilt wegen (3.1.7)

$$s_{x_+}(L_{\lambda_k} y_+) = \overline{\mathfrak{m}_{\lambda_k}}[L_{\lambda_k} x_+, L_{\lambda_k} y_+] = \overline{s_{y_+}(L_{\lambda_k} x_+)}.$$

Dies zusammen mit (3.1.38) impliziert

$$\begin{aligned}
 & 2s_{x_+}(L_{\lambda_k}y_+) - \mathfrak{s}[x_+, y_-] \\
 &= \overline{s_{y_+}(L_{\lambda_k}x_+)} + (s_{x_+}(L_{\lambda_k}y_+) - s_{x_+}(y_-)) = \overline{s_{y_+}(L_{\lambda_k}x_+)} + s_{x_+}(L_{\lambda_k}y_+ - y_-) \\
 &= \langle L_{\lambda_k}x_+, By \rangle + \overline{\mathfrak{s}^-}[L_{\lambda_k}x_+, y_-] + s_{x_+}(E_{\lambda_k}y). \tag{3.1.39}
 \end{aligned}$$

Setzt man nun (3.1.39) in (3.1.37) ein und benutzt (3.1.36), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (T_{\lambda_k}^{\#}x_+)(y_+) &= \langle x + E_{\lambda_k}x, (B - \lambda_k)y \rangle \\
 &+ s_{x_+}(E_{\lambda_k}y) - \overline{\mathfrak{s}^-}(L_{\lambda_k}x_+, E_{\lambda_k}y) - \lambda_k \langle L_{\lambda_k}x_+, E_{\lambda_k}y \rangle.
 \end{aligned}$$

Wegen (3.1.7) und (3.1.3) kürzen sich alle Terme in der letzten Zeile gegenseitig. Daher schlussfolgern wir

$$(T_{\lambda_k}^{\#}x_+)(y_+) = \langle x_+ + L_{\lambda_k}x_+, (B - \lambda_k)y \rangle. \tag{3.1.40}$$

Nun schätzen wir  $\mathfrak{h}_{\lambda_k}$  ab. Wegen (3.1.33) und (3.1.24) erhalten wir

$$\mathfrak{h}_{\lambda_k}[y_+] = (c_{\lambda_k} + 1)\mathfrak{n}_{\lambda_k}[y_+] + \mathfrak{g}_{\lambda_k}[y_+]. \tag{3.1.41}$$

Nach (3.1.29) und (3.1.40) gilt

$$\begin{aligned}
 |\mathfrak{g}_{\lambda_k}[y_+]| &= |(T_{\lambda_k}^{\#}y_+)(y_+)| \\
 &= |\langle (1 + L_{\lambda_k})y_+, (B - \lambda_k)y \rangle| \\
 &= |\langle y + E_{\lambda_k}y, (B - \lambda_k)y \rangle| \\
 &\leq \|y + E_{\lambda_k}y\| \|(B - \lambda_k)y\| \\
 &\leq (1 + |\lambda_k|) \|y + E_{\lambda_k}y\| \|y\|_{\mathfrak{D}(B)}.
 \end{aligned} \tag{3.1.42}$$

Hier ist

$$\|y\|_{\mathfrak{D}(B)} := (\|By\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$$

die Graphnorm von  $B$ .

Wegen (3.1.38), (3.1.7) und (3.1.3) erhalten wir

$$\langle By, E_{\lambda_k}y \rangle + \overline{\mathfrak{s}^-}[y_-, E_{\lambda_k}y] = \overline{\mathfrak{s}^-}[L_{\lambda_k}y_+, E_{\lambda_k}y] + \lambda_k \langle L_{\lambda_k}y_+, E_{\lambda_k}y \rangle.$$

Mit (3.1.36), (3.1.2) und (2.1.7) impliziert dies

$$\|(B - \lambda_k)y\| \|E_{\lambda_k}y\| \geq |\langle (B - \lambda_k)y, E_{\lambda_k}y \rangle| \geq (\lambda_k - a) \|E_{\lambda_k}y\|^2. \tag{3.1.43}$$

Durch das Einsetzen von (3.1.43) in (3.1.42) erhalten wir

$$|\mathfrak{g}_{\lambda_k}[y_+]| \leq (1 + |\lambda_k|) \left(1 + \frac{1 + |\lambda_k|}{\lambda_k - a}\right) \|y\|_{\mathfrak{D}(B)}^2. \tag{3.1.44}$$



Nach (3.1.11), (3.1.36) und (3.1.43) gilt

$$\mathfrak{n}_{\lambda_k}[y_+] = \|y_+ + L_{\lambda_k}y_+\|^2 = \|y + E_{\lambda_k}y\|^2 \leq \left(1 + \frac{1 + |\lambda_k|}{\lambda_k - a}\right)^2 \|y\|_{\mathfrak{D}(B)}^2. \quad (3.1.45)$$

Durch das Einsetzen von (3.1.44) und (3.1.45) in (3.1.41) finden wir eine Konstante  $c(\lambda_k, a) > 0$ , sodass

$$\mathfrak{h}_{\lambda_k}^{1/2}[y_+] \leq c(\lambda_k, a) \|y\|_{\mathfrak{D}(B)} \quad (3.1.46)$$

gilt. Für  $y_+ \in (\Lambda_+ \mathfrak{D}(B)) \setminus \{0\}$  erhalten wir mit (3.1.40) und (3.1.46)

$$\frac{|(T_{\lambda_k}^{\#}x_+)(y_+)|}{\mathfrak{h}_{\lambda_k}^{1/2}(y_+)} \geq \frac{|\langle x_+ + L_{\lambda_k}x_+, (B - \lambda_k)y \rangle|}{c(\lambda_k, a) \|y\|_{\mathfrak{D}(B)}}. \quad (3.1.47)$$

Aus (3.1.33) folgt für  $x_+ \in \mathfrak{G}_{\lambda_k}$

$$\|T_{\lambda_k}^{\#}x_+\|_{\mathfrak{G}_{\lambda_k}^*} \geq \sup_{y_+ \in (\Lambda_+ \mathfrak{D}(B)) \setminus \{0\}} \frac{|(T_{\lambda_k}^{\#}x_+)(y_+)|}{\mathfrak{h}_{\lambda_k}^{1/2}[y_+]}. \quad (3.1.48)$$

Zusammen mit (3.1.32) ergibt dies

$$\sup_{\substack{x_+ \in \mathfrak{Z}_l \\ \mathfrak{n}_{\lambda_k}[x_+] = 1}} \sup_{y_+ \in (\Lambda_+ \mathfrak{D}(B)) \setminus \{0\}} \frac{|(T_{\lambda_k}^{\#}x_+)(y_+)|}{\mathfrak{h}_{\lambda_k}^{1/2}[y_+]} \rightarrow 0 \quad \text{für } l \rightarrow \infty.$$

Daher erhalten wir mit (3.1.47)

$$\sup_{\substack{x_+ \in \mathfrak{Z}_l \\ \mathfrak{n}_{\lambda_k}[x_+] = 1}} \sup_{y \in \mathfrak{D}(B) \setminus \{0\}} \frac{|\langle x_+ + L_{\lambda_k}x_+, (B - \lambda_k)y \rangle|}{\|y\|_{\mathfrak{D}(B)}} \rightarrow 0 \quad \text{für } l \rightarrow \infty. \quad (3.1.48)$$

Wir zeigen nun, dass entweder  $\lambda_k \in \sigma_{\text{ess}}(B) \cap (a, \infty)$  gilt oder  $\lambda_k$  ein Eigenwert von  $B$  in  $(a, \infty)$  mit Multiplizität größer oder gleich  $w_k$  ist. Dazu definieren wir

$$\tilde{\mathfrak{Z}}_l := (1 + L_{\lambda_k})\mathfrak{Z}_l. \quad (3.1.49)$$

Da wir wissen, dass  $\dim \mathfrak{Z}_l = w_k$  gilt, folgt

$$\dim \tilde{\mathfrak{Z}}_l = w_k. \quad (3.1.50)$$

Die Relationen (3.1.48) und (3.1.50) implizieren die Existenz einer Folge  $(\tilde{x}_l^{(\tilde{l})})_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ ,  $\tilde{l} \in \{1, 2, \dots, w_k\}$ , sodass  $\{\tilde{x}_l^{(1)}, \dots, \tilde{x}_l^{(w_k)}\}$  ein Orthonormalsystem in  $\mathfrak{H}$  für alle  $l \in \mathbb{N}$  ist und

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathfrak{D}(B) \setminus \{0\}} \frac{|\langle \tilde{x}_l^{(\tilde{l})}, (B - \lambda_k)y \rangle|}{\|y\|_{\mathfrak{D}(B)}} = 0 \quad \text{für alle } \tilde{l} \in \{1, 2, \dots, w_k\}$$

gilt. Weil  $\mathfrak{D}(B)$  dicht in  $\mathfrak{H}$  bezüglich  $\|\cdot\|$  ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $(\tilde{x}_l^{(\tilde{l})})_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{D}(B)$  für alle  $\tilde{l} \in \{1, 2, \dots, w_k\}$  gilt. Aus  $\|y\|_{\mathfrak{D}(B)} = \|(B + i)y\|$  und  $\mathfrak{H} = (B + i)\mathfrak{D}(B)$  schlussfolgern wir

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{\substack{y \in \mathfrak{H} \setminus \{0\} \\ \|y\|=1}} |\langle (B - i)^{-1}(B - \lambda_k)\tilde{x}_l^{(\tilde{l})}, y \rangle| = 0 \quad \text{für alle } \tilde{l} \in \{1, 2, \dots, w_k\},$$

d. h.  $\lim_{l \rightarrow \infty} (B - i)^{-1}(B - \lambda_k)\tilde{x}_l^{(\tilde{l})} = 0$  für alle  $\tilde{l} \in \{1, 2, \dots, w_k\}$ . Falls  $\lambda_k \notin \sigma(B)$ , dann ist  $(B - \lambda_k)^{-1}(B - i)$  ein beschränkter Operator und daher erhalten wir für  $\tilde{l} \in \{1, 2, \dots, w_k\}$  den Widerspruch

$$1 = \|\tilde{x}_l^{(\tilde{l})}\| \leq \|(B - \lambda_k)^{-1}(B - i)\| \|(B - i)^{-1}(B - \lambda_k)\tilde{x}_l^{(\tilde{l})}\| \rightarrow 0 \quad \text{für } l \rightarrow \infty.$$

Daher gilt entweder  $\lambda_k \in \sigma_{\text{ess}}(B) \cap (a, \infty)$  oder  $\lambda_k \in (a, \infty)$  ist ein Eigenwert von  $B$  mit Multiplizität größer oder gleich  $w_k$ . Dies impliziert  $\lambda_k \geq \mu_k$  für alle  $k \in \{1, \dots, w_1\}$ . Per Induktion schlussfolgern wir  $\lambda_k \geq \mu_k$  für alle  $k \geq 1$ .

### 3.2 Beweis von Satz 2.1.2

Der Beweis erfolgt durch eine Anwendung von Satz 2.1.1. Dabei sei  $\mathbf{q} := \mathbf{d}_n^M$  und  $\Lambda_{\pm}$  hänge davon ab, ob Teil (a) oder (b) des Satzes bewiesen werden soll. In Teil (a) ist  $\Lambda_{\pm}$  gleich  $T_{n,\pm}$ , welcher der Projektor auf die oberen beziehungsweise unteren  $N/2$  Komponenten des  $N$ -komponentigen Spinors ist, d. h.

$$T_{n,+} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_{n,-} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad \text{für } \chi, \psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2}).$$

Für den Beweis von Teil (b) wählen wir  $\Lambda_{\pm} = P_{n,\pm}^M$ . Dass  $D_n^M(V)$  die Rolle von  $B$  spielt, wird in Abschnitt 3.2.1 bewiesen.

Da die Annahmen (2.1.6) und (2.1.7) von Satz 2.1.1 für beide Minimax-Prinzipien offenbar erfüllt sind, muss nur noch (2.1.8) überprüft werden. Dies geschieht für das Talman-Minimax-Prinzip in Abschnitt 3.2.3 und für das Esteban-Séré-Minimax-Prinzip in Abschnitt 3.2.4. Die dazu benötigten Hilfsmittel werden in Abschnitt 3.2.2 entwickelt.

### 3.2.1 Überprüfung von (2.1.4) und (2.1.5)

Dass (2.1.4) und (2.1.5) mit  $\mathfrak{q} = \mathfrak{d}_n^M$  und  $B = D_n^M(V)$  gelten, folgt aus Satz 2.1 in [54] und dem nachfolgenden Lemma.

**Lemma 3.2.1** (Lemma 9 in [53]). *Seien  $V \in \mathfrak{P}_n^{(n-1)/2}$  und  $M > 0$ . Dann ist die quadratische Form  $\mathfrak{v}$  von  $V$  eine Formstörung von  $D_n^M(0)$  im Sinn von Definition 2.1 in [54].*

*Beweis.* Der Operator  $V$  ist  $D_n^M(0)$  formbeschränkt nach der Herbst-Ungleichung (siehe Satz 2.5 in [39]). Außerdem gilt die Ungleichung

$$\|r^{-1/2}D_n^M(0)^{-1}r^{-1/2}\| \leq 2/(n-1).$$

Diese ist für  $n = 3$  in [42] bewiesen. Dieselben Argumente können auch für  $n = 2$  verwendet werden (siehe Schritt 1 im Beweis von Satz 1 in [13]). Daher erhalten wir

$$\|V^{1/2}D_n^M(0)^{-1}V^{1/2}\| \leq \|V^{1/2}r^{1/2}\|^2 \cdot \|r^{-1/2}D_n^M(0)^{-1}r^{-1/2}\| < 1.$$

Dann ist durch die Neumann-Reihe ein beschränktes Inverses von  $1 + V^{1/2}D_n^M(0)^{-1}V^{1/2}$  gegeben. Nun folgt die Behauptung aus Satz 2.2 in [54] mit  $A := D_n^M(0)$  und  $t := 0$ .  $\square$

### 3.2.2 Drehimpulskanalzerlegung im Impulsraum

Die Fourier-Transformation verbindet die quantenmechanische Beschreibung eines Teilchens im Zustands- und Impulsraum. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{F}_n$  die unitäre Fourier-Transformation in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , welche für  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\mathcal{F}_n\psi := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \cdot, \mathbf{x} \rangle} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.2.1)$$

definiert ist.

Die Drehimpulskanalzerlegung in  $n$  Dimensionen wurde bereits zu Beginn von Abschnitt 2.6.5 eingeführt. Zusätzlich definieren wir nun die Teilmengen  $\mathfrak{T}_n^\pm$  von  $\mathfrak{T}_n$ :

$$\mathfrak{T}_n^a := \begin{cases} 2\mathbb{Z} & \text{für } n = 2, a = +; \\ 2\mathbb{Z} + 1 & \text{für } n = 2, a = -; \\ \{(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3 : s = \pm 1/2\} & \text{für } n = 3, a = \pm. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass  $l \in \mathbb{N}$  aus  $(l, m, -1/2) \in \mathfrak{T}_3^-$  folgt.

Außerdem führen wir die bijektiven Abbildungen

$$T_2 : \mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_2, \quad T_2 k := k + 1 \quad (3.2.3)$$

und

$$T_3 : \mathfrak{T}_3 \rightarrow \mathfrak{T}_3, \quad T_3(l, m, s) := (l + 2s, m, -s) \quad (3.2.4)$$

ein. Mit der Hilfe von (2.6.20) und (2.6.21) definieren wir den unitären Operator

$$\mathcal{Q}_n : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2}) \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+), \quad \psi \mapsto \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \psi_j. \quad (3.2.5)$$

Das nachfolgende Lemma ist in Abschnitt 2 in [2] formuliert, wobei diese Formulierung für  $n = 2$  auf Lemma 2.1 und Lemma 2.2 in [4] basiert.

**Lemma 3.2.2.** *Sei  $j \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$ . Auf  $(1, \infty)$  definieren wir die Funktion*

$$Q_j(z) := 2^{-j-1} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^j (z - t)^{-j-1} dt, \quad (3.2.6)$$

*welche auch als Legendre-Funktion der zweiten Art (siehe Abschnitt 15.3 in [85]) bekannt ist. Mit  $\mathbf{q}_j$  bezeichnen wir eine Sesquilinearform, die auf  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, (1 + p^2)^{1/2} dp) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, (1 + p^2)^{1/2} dp)$  durch*

$$\mathbf{q}_j[f, g] := \pi^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{f(p)} Q_j\left(\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right)\right) g(q) dq dp \quad (3.2.7)$$

*gegeben ist. Dann gilt für  $\zeta, \eta \in \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$  die Relation*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\bar{\zeta}(\mathbf{x}) \cdot \eta(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x} = \begin{cases} \sum_{k \in \mathfrak{T}_2} \mathbf{q}_{|k|-1/2} [(\mathcal{F}_2 \zeta)_k, (\mathcal{F}_2 \eta)_k] & \text{falls } n = 2, \\ \sum_{(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3} \mathbf{q}_l [(\mathcal{F}_3 \zeta)_{(l, m, s)}, (\mathcal{F}_3 \eta)_{(l, m, s)}] & \text{falls } n = 3. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Als Nächstes wird die Darstellung des Operators  $D_n^0(0)$  in Drehimpuls-kanalzerlegung im Impulsraum untersucht. Dazu werden die unitären Transformationen verwendet, welche in (2.6.22) und (2.6.23) definiert wurden.

**Lemma 3.2.3** (Lemma 8 in [53]). *Es gilt die Relation*

$$(\mathcal{A}_n \mathcal{F}_n)^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \begin{pmatrix} 0 & (\cdot) \\ (\cdot) & 0 \end{pmatrix} \right) (\mathcal{A}_n \mathcal{F}_n) = D_n^0(0). \quad (3.2.9)$$

*Beweis.* Durch eine Rechnung in Polarkoordinaten und Relation 2.1.28 in [2] bestätigt man, dass

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \rho \\ e^{i\varphi} \rho & 0 \end{pmatrix} \text{ für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.2.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \Omega_{l,m,s} = \Omega_{l+2s,m,-s} \text{ für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } (l, m, s) \in \mathfrak{T}_3 \quad (3.2.11)$$

gelten. Da die Menge  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  dicht in  $H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  ist, genügt es mit  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$  und  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$  zu arbeiten. Außerdem überführt die Fourier-Transformation Differentialoperatoren in Multiplikationsoperatoren, d. h.:

$$\langle \psi, D_2^0(0)\psi \rangle = \langle \mathcal{F}_2\psi, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \mathcal{F}_2\psi \rangle, \quad (3.2.12)$$

$$\langle \zeta, D_3^0(0)\zeta \rangle = \langle \mathcal{F}_3\zeta, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \mathcal{F}_3\zeta \rangle. \quad (3.2.13)$$

Hier bezeichnen wir mit  $\mathbf{p}$  den Multiplikationsoperator mit der unabhängigen Variablen in  $L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{p})$ .

Jetzt zeigen wir (3.2.9) für  $n = 3$ . Wir erhalten durch die Darstellung (2.6.19) des oberen und unteren Bispinors von  $\mathcal{F}_3\zeta$  und der Notation, welche in (2.6.24) eingeführt wurde, dass die rechte Seite von (3.2.13) gleich

$$2 \sum_{\substack{(l', m', s') \in \mathfrak{T}_3 \\ (l, m, s) \in \mathfrak{T}_3}} \operatorname{Re} \left( \langle |\mathbf{p}|^{-1} (\mathcal{F}_3\zeta)_{(l', m', s')}^+ \Omega_{l', m', s'}, (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) |\mathbf{p}|^{-1} (\mathcal{F}_3\zeta)_{(l, m, s)}^- \Omega_{l, m, s} \rangle \right) \quad (3.2.14)$$

ist. Durch die Anwendung von (3.2.11), (2.6.23) und (3.2.1) erhalten wir, dass der Ausdruck in (3.2.14) gleich

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3} \operatorname{Re} \left( \langle (\mathcal{F}_3\zeta)_{(l+2s, m, -s)}^+, (\cdot) (\mathcal{F}_3\zeta)_{(l, m, s)}^- \rangle \right) \\ &= \sum_{(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3} \left\langle \begin{pmatrix} (\mathcal{F}_3\zeta)_{(l, m, s)}^+ \\ (\mathcal{F}_3\zeta)_{T_3(l, m, s)}^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & (\cdot) \\ (\cdot) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathcal{F}_3\zeta)_{(l, m, s)}^+ \\ (\mathcal{F}_3\zeta)_{T_3(l, m, s)}^- \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{A}_3 \mathcal{F}_3\zeta, \left( \bigoplus_{(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3} \begin{pmatrix} 0 & (\cdot) \\ (\cdot) & 0 \end{pmatrix} \right) \mathcal{A}_3 \mathcal{F}_3\zeta \right\rangle \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

ist. Daher ist die Behauptung von Lemma 3.2.3 eine Konsequenz aus (3.2.13), (3.2.14) und (3.2.15).

In analoger Art und Weise erhalten wir für  $n = 2$  die Relation (3.2.9), d. h., wir ersetzen die obere und untere Komponente von  $\mathcal{F}_2\psi$  in (3.2.12) durch die Darstellung (2.6.18) und führen eine Rechnung aus, welche (3.2.10) verwendet.  $\square$

### 3.2.3 Überprüfung von (2.1.8) für das Minimax-Prinzip von Talmann

Es ist ausreichend einen Operator  $L_n : \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2}) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$  zu finden, sodass

$$\inf_{\chi \in \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2}) \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{d}_n^M \left[ \begin{pmatrix} \chi \\ L_n \chi \end{pmatrix} \right] + \mathbf{v} \left[ \begin{pmatrix} \chi \\ L_n \chi \end{pmatrix} \right]}{\left\| \begin{pmatrix} \chi \\ L_n \chi \end{pmatrix} \right\|^2} > -M$$

gilt. Nun geben wir in drei Schritten eine explizite Konstruktion von  $L_n$  an und zeigen, dass  $L_n$  diese Bedingung erfüllt. Für  $k \in \mathfrak{T}_2$  und  $(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3$  definieren wir im ersten Schritt verschiedene Konstanten:

$$c_n := 4(n-1)^{-1} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{4})^2}{\Gamma(\frac{n-1}{4})^2}, \quad (3.2.16)$$

$$c_{2,k} := \begin{cases} c_2^{-1} & \text{für } k \in \mathfrak{T}_2^-, \\ c_2 & \text{für } k \in \mathfrak{T}_2^+, \end{cases} \quad (3.2.17)$$

$$c_{3,(l,m,s)} := c_3^{2s}. \quad (3.2.18)$$

Im zweiten Schritt definieren wir den Operator  $R_n$

$$R_n : \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+), \quad \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \psi_j \mapsto \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} c_{n,j} \psi_{T_n^{-1}j}. \quad (3.2.19)$$

Abschließend definieren wir

$$L_n := (\mathcal{Q}_n \mathcal{F}_n)^* R_n (\mathcal{Q}_n \mathcal{F}_n). \quad (3.2.20)$$

Die gewünschten Eigenschaften von  $L_n$  folgen aus dem nachfolgenden Lemma.

**Lemma 3.2.4** (Lemma 10 in [53]). *Sei  $\chi \in \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$ , dann ist  $L_n \chi \in \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$  und die Ungleichung*

$$M \frac{c_n^2 - 1}{c_n^2 + 1} \left\| \begin{pmatrix} \chi \\ L_n \chi \end{pmatrix} \right\|^2 \leq \mathbf{d}_n^M \left[ \begin{pmatrix} \chi \\ L_n \chi \end{pmatrix} \right] - \frac{n-1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left| \begin{pmatrix} \chi(\mathbf{x}) \\ (L_n \chi)(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right|^2 d\mathbf{x} \quad (3.2.21)$$

gilt.

*Beweis.* Da

$$\mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n) = \{\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\cdot|^2)^{1/4} \mathcal{F}_n \psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$$

gilt, folgt aus der Unitarität von  $\mathcal{Q}_n$

$$\mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n) = \{\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) : \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} (1 + (\cdot)^2)^{1/4} (\mathcal{F}_n \psi)_j \in \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)\}. \quad (3.2.22)$$

Wir beobachten, dass  $R_n$  beschränkt ist, was zusammen mit (3.2.22) und (3.2.20) impliziert, dass  $L_n \chi \in \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$  gilt.

Nun definieren wir die quadratische Form  $\mathbf{p}$  auf  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, (1 + p^2)^{1/2} dp)$  durch

$$\mathbf{p}[v] := \int_0^\infty p |v(p)|^2 dp.$$

Für den Beweis von (3.2.21) wiederholen wir, dass die quadratische Form (3.2.7) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{k+1/2}[\zeta] &\leq \mathbf{q}_{k-1/2}[\zeta], \\ \mathbf{q}_{k+1}[\zeta] &\leq \mathbf{q}_k[\zeta], \\ \mathbf{q}_0[\zeta] &\leq c_3^{-1} \mathbf{p}[\zeta], \quad \mathbf{q}_1[\zeta] \leq c_3 \mathbf{p}[\zeta], \\ \mathbf{q}_{-1/2}[\zeta] &\leq 2c_2^{-1} \mathbf{p}[\zeta], \quad \mathbf{q}_{1/2}[\zeta] \leq 2c_2 \mathbf{p}[\zeta] \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, (1 + p^2)^{1/2} dp)$  erfüllt [4, 27].

Nach Lemma 3.2.2 erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\chi(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x} = \begin{cases} \sum_{k \in \mathfrak{T}_2} \mathbf{q}_{|k|-1/2}[(\mathcal{F}_2 \chi)_k] & \text{falls } n = 2, \\ \sum_{(l,m,s) \in \mathfrak{T}_3} \mathbf{q}_l[(\mathcal{F}_3 \chi)_{(l,m,s)}] & \text{falls } n = 3, \end{cases} \quad (3.2.24)$$

und nach (3.2.17) - (3.2.20)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(L_n \chi)(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x} \\ &= \begin{cases} \sum_{k \in \mathfrak{T}_2^+} c_2^2 \mathbf{q}_{|k|-\frac{1}{2}}[(\mathcal{F}_2 \chi)_{k-1}] + \sum_{k \in \mathfrak{T}_2^-} c_2^{-2} \mathbf{q}_{|k|-\frac{1}{2}}[(\mathcal{F}_2 \chi)_{k-1}] & \text{falls } n = 2, \\ \sum_{(l,m,\frac{1}{2}) \in \mathfrak{T}_3^+} c_3^2 \mathbf{q}_l[(\mathcal{F}_3 \chi)_{(l+1,m,-\frac{1}{2})}] + \sum_{(l,m,-\frac{1}{2}) \in \mathfrak{T}_3^-} c_3^{-2} \mathbf{q}_l[(\mathcal{F}_3 \chi)_{(l-1,m,\frac{1}{2})}] & \text{falls } n = 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

An dieser Stelle wiederholen wir, dass  $l \in \mathbb{N}$  aus  $(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3^-$  folgt. Daher impliziert (3.2.23), dass die rechte Seite von (3.2.24) durch

$$2(n-1)^{-1} \left( \sum_{j \in \mathfrak{T}_n^+} c_n^{-1} \mathbf{p}[(\mathcal{F}_n \chi)_j] + \sum_{j \in \mathfrak{T}_n^-} c_n \mathbf{p}[(\mathcal{F}_n \chi)_j] \right) \quad (3.2.26)$$

abgeschätzt werden kann und die rechte Seite von (3.2.25) durch

$$2(n-1)^{-1} \left( \sum_{j \in \mathfrak{T}_n^+} c_n \mathbf{p}[(\mathcal{F}_n \chi)_{T_n^{-1}j}] + \sum_{j \in \mathfrak{T}_n^-} c_n^{-1} \mathbf{p}[(\mathcal{F}_n \chi)_{T_n^{-1}j}] \right). \quad (3.2.27)$$

Wegen  $T_n(\mathfrak{T}_n^\pm) = \mathfrak{T}_n^\mp$  schlussfolgern wir, dass (3.2.27) gleich (3.2.26) ist. Dies zusammen mit der Relation

$$(\mathcal{F}_n L_n \chi)_{T_n j} = c_{n, T_n j} (\mathcal{F}_n \chi)_j \text{ für alle } j \in \mathfrak{T}_n$$

impliziert

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left| \begin{pmatrix} \chi(\mathbf{x}) \\ (L_n \chi)(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right|^2 d\mathbf{x} \leq \\ & \sum_{j \in \mathfrak{T}_n} \int_{\mathbb{R}_+} \left\langle \begin{pmatrix} (\mathcal{F}_n \chi)_j(p) \\ (\mathcal{F}_n L_n \chi)_{T_n j}(p) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathcal{F}_n \chi)_j(p) \\ (\mathcal{F}_n L_n \chi)_{T_n j}(p) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} dp. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Eine Rechnung, welche (3.2.17) - (3.2.20) benutzt, liefert

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} \chi \\ L_n \chi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{N/2}} & 0 \\ 0 & \mp \mathbb{I}_{\mathbb{C}^{N/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ L_n \chi \end{pmatrix} \right\rangle \\ & = (1 \mp c_n^{-2}) \sum_{j \in \mathfrak{T}_n^+} \|(\mathcal{F}_n \chi)_j\|^2 + (1 \mp c_n^2) \sum_{j \in \mathfrak{T}_n^-} \|(\mathcal{F}_n \chi)_j\|^2. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Nach Lemma 3.2.3 wissen wir, dass die rechte Seite der Relation (3.2.28) plus  $M$  mal der Minusfall von der linken Seite von (3.2.29) gleich  $\mathbf{d}_n^M \left[ \begin{pmatrix} \chi \\ L_n \chi \end{pmatrix} \right]$  ist. Daher erhalten wir (3.2.21) durch (3.2.28) und (3.2.29).  $\square$

### 3.2.4 Überprüfung von (2.1.8) für das Minimax-Prinzip von Esteban und Séré

Es genügt  $G_n^M : P_{n,+}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N) \rightarrow P_{n,-}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  zu finden, sodass

$$\inf_{\chi \in P_{n,+}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N) \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{d}_n^M [\chi + G_n^M \chi] + \mathbf{v}[\chi + G_n^M \chi]}{\|\chi + G_n^M \chi\|^2} > -M \quad (3.2.30)$$

gilt. Im nachfolgenden Lemma beweisen wir, dass eine mögliche Wahl von  $G_n^M$  gleich

$$G_n^M := (\mathcal{A}_n \mathcal{F}_n)^* E_n^M (\mathcal{A}_n \mathcal{F}_n) \quad (3.2.31)$$



mit

$$E_n^M : \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2), \quad (3.2.32)$$

$$\bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \Psi_j \mapsto \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \frac{M - c_{n,j}(\cdot) + \sqrt{M^2 + (\cdot)^2}}{c_{n,j}M + (\cdot) + c_{n,j}\sqrt{M^2 + (\cdot)^2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi_j \quad (3.2.33)$$

ist.

**Lemma 3.2.5** (Lemma 11 in [53]). *Sei  $\chi \in P_{n,+}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$ . Es gilt  $G_n^M \chi \in P_{n,-}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  und die Relation*

$$L_n(\chi + G_n^M \chi)_1 = (\chi + G_n^M \chi)_2. \quad (3.2.34)$$

**Hinweis 3.2.6.** *Mit Lemma 3.2.4 und der Relation (3.2.34) schlussfolgern wir (3.2.30).*

*Beweis von Lemma 3.2.5.* Nach Lemma 3.2.3 gilt  $\psi \in P_{n,\pm}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  genau dann, wenn es ein  $\bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \zeta_j \in \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, (1+p^2)^{1/2} dp)$  gibt, sodass

$$(\mathcal{A}_n \mathcal{F}_n \psi)_j(p) = \begin{cases} \zeta_j(p) \left( \frac{1}{\frac{p}{M + \sqrt{M^2 + p^2}}} \right) & \text{„+“ Fall,} \\ \zeta_j(p) \left( \frac{-p}{\frac{1}{M + \sqrt{M^2 + p^2}}} \right) & \text{„-“ Fall,} \end{cases} \quad (3.2.35)$$

für jedes  $j \in \mathfrak{I}_n$  und  $p \in \mathbb{R}_+$  gilt. Daraus folgt  $G_n^M \chi \in P_{n,-}^M \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$ .

Wegen (3.2.35), (3.2.32) gibt es ein  $\bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} v_j \in \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, (1+p^2)^{1/2} dp)$ , sodass

$$(\mathcal{A}_n \mathcal{F}_n \chi)_j(p) = v_j(p) \left( \frac{1}{\frac{p}{M + \sqrt{M^2 + p^2}}} \right)$$

und

$$\begin{aligned} ((\mathbb{I} + E_n^M) \mathcal{A}_n \mathcal{F}_n \chi)_j &= \begin{pmatrix} \tilde{v}_j^M \\ c_{n,Tnj} \tilde{v}_j^M \end{pmatrix} \text{ mit} \\ \tilde{v}_j^M(p) &:= \frac{c_{n,j} \left( p^2 + (M + \sqrt{M^2 + p^2})^2 \right)}{(M + \sqrt{M^2 + p^2})(c_{n,j}M + p + c_{n,j}\sqrt{M^2 + p^2})} v_j(p) \text{ für } p \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

für jedes  $j \in \mathfrak{T}_n$  gilt. Deshalb erhalten wir mit (3.2.31), (3.2.19) und (3.2.20) die Relation

$$\chi + G_n^M \chi = (\mathcal{A}_n \mathcal{F}_n)^* \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \begin{pmatrix} \tilde{v}_j^M \\ c_{n, T_{nj}} \tilde{v}_j^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{Q}_n \mathcal{F}_n)^* \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \tilde{v}_j^M \\ L_n (\mathcal{Q}_n \mathcal{F}_n)^* \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \tilde{v}_j^M \end{pmatrix}.$$

Daher haben wir die Relation (3.2.34) bewiesen.  $\square$

### 3.3 Beweis von Satz 2.2.1

Weil  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2})$  dicht in  $H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$  ist und die rechte Seite von (2.2.1) stetig in der Graphnorm von  $\sqrt{-\Delta}$  ist (siehe Satz 2.5 in [39]), können wir  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2}) \setminus \{0\}$  annehmen.

Durch die Anwendung von Satz 2.1.2 (a) erhalten wir

$$\lambda(v) \leq \sup_{\psi \in H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2})} I_{n,v,\chi}^M(\psi) \text{ mit} \quad (3.3.1)$$

$$I_{n,v,\chi}^M : H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.3.2)$$

$$I_{n,v,\chi}^M(\psi) := \frac{\left\langle \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (M+v)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^{N/2}} & K_n^* \\ K_n & (-M+v)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^{N/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|^2}. \quad (3.3.3)$$

In (3.3.1) wird das Supremum über  $H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2})$  berechnet und nicht über  $H^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$ . Dies kann durch die  $D_n^M(0)$  Formbeschränktheit von  $v\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  (siehe Lemma 3.2.1) und die Dichtheit von  $H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2})$  in  $H^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$  gerechtfertigt werden.

Daher folgt der Beweis von Satz 2.2.1 im Wesentlichen aus dem nachfolgenden Lemma.

**Lemma 3.3.1** (Lemma 13 in [53]). *Wir definieren*

$$J_{n,v,\chi}^M : (-M, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$J_{n,v,\chi}^M(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|K_n \chi(\mathbf{x})|^2}{M + \lambda - v(\mathbf{x})} + (M - \lambda + v(\mathbf{x})) |\chi(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

Seien  $\lambda \in (-M, \infty)$ ,  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2}) \setminus \{0\}$  und  $J_{n,v,\chi}^M(\lambda) \leq 0$ . Dann gilt

$$\sup_{\psi \in H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2})} I_{n,v,\chi}^M(\psi) \leq \lambda.$$

*Beweis.* Zuerst führen wir

$$\psi_{n,v,\chi}^M : (-M, \infty) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2}), \quad \psi_{n,v,\chi}^M(\lambda) := \frac{K_n \chi}{M + \lambda - v} \quad (3.3.4)$$

ein. Für jedes  $\zeta \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2})$  gilt

$$\begin{aligned} & (I_{n,v,\chi}^M(\psi_{n,v,\chi}^M(\lambda) + \zeta) - \lambda)(\|\chi\|^2 + \|\psi_{n,v,\chi}^M(\lambda) + \zeta\|^2) \\ &= J_{n,v,\chi}^M(\lambda) + 2 \operatorname{Re} \langle \zeta, K_n \chi - (M + \lambda - v) \psi_{n,v,\chi}^M(\lambda) \rangle + \\ & \langle K_n \chi - (M + \lambda - v) \psi_{n,v,\chi}^M(\lambda), \psi_{n,v,\chi}^M(\lambda) \rangle - \langle \zeta, (M + \lambda - v) \zeta \rangle \leq J_{n,v,\chi}^M(\lambda). \end{aligned}$$

Daraus schließen wir die Behauptung.  $\square$

Aus Lemma 3.3.1 und (3.3.1) erhalten wir

$$J_{n,v,\chi}^M(\lambda(v) - \varepsilon) > 0 \text{ für } \varepsilon \in (0, M + \lambda(v)). \quad (3.3.5)$$

Mit  $\varepsilon \searrow 0$  in (3.3.5) schlussfolgern wir Satz 2.2.1.

### 3.4 Beweis von Satz 2.2.3

Da der Unterschied zwischen  $\mathbf{D}_n^{\nu,M}$  und  $\mathbf{D}_n^\nu$  beschränkt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $M > 0$  annehmen.

In Abschnitt 3.4.1 wird gezeigt, dass der Abschluss der Einschränkung von  $\mathbf{D}_n^{\nu,M}$  auf  $\mathfrak{C}_n^\nu$  selbstadjungiert und unabhängig von der Wahl von  $\xi_n^\nu$  ist. Aus diesem Resultat folgt die Behauptung, wenn  $\mathfrak{C}_n^\nu$  im Definitionsbereich von  $\mathbf{D}_n^{\nu,M}$  für eine spezielle Wahl von  $\xi_n^\nu$  enthalten ist. Daher genügt es abschließend zu zeigen, dass für  $m \in \{-1/2, 1/2\}^{n-1}$ ,  $(n, \nu) \in (\{2\} \times (0, 1/2]) \cup (\{3\} \times (\sqrt{3}/2, 1])$  und  $\xi_n^\nu$  gleich der differenzierbaren Abschnidefunktion  $\xi$  (d. h.  $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}_+; [0, 1])$ ,  $\xi(t) = 1$  für  $t \in (0, 1)$  und  $\xi(t) = 0$  für  $t > 2$ ) die Funktion  $\zeta_{n,m}^\nu$  Element von  $\mathfrak{D}(\mathbf{D}_n^{\nu,M})$  ist.

Zunächst führen wir die quadratische Form  $\mathbf{q}_n^{\nu,M}$  des Schurkomplements von  $\mathbf{D}_n^{\nu,M} - M\sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2}\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}$  auf  $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2})$  durch

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n^{\nu,M}[\psi] := & \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|K_n \psi(\mathbf{x})|^2}{M + M\sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2} + \frac{\nu}{|\mathbf{x}|}} + \right. \\ & \left. \left( M - M\sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2} - \frac{\nu}{|\mathbf{x}|} \right) |\psi(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

ein. Diese quadratische Form ist symmetrisch (siehe (2.2.6)) und nichtnegativ (siehe Korollar 2.2.2) und daher nach Satz X.23 in [58] abschließbar. Den Definitionsbereich des Abschlusses von  $\mathbf{q}_n^{\nu,M}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{Q}_n^{\nu,M}$ . Nach

der Charakterisierung von  $\mathfrak{D}(\mathbf{D}_n^{\nu,M})$  in Satz 1 in [25] ist es nun ausreichend zu zeigen, dass für alle  $m \in \{-1/2, 1/2\}^{n-1}$  der obere  $N/2$ -Spinor von  $\zeta_{n,m}^\nu$  mit  $\xi_n^\nu = \xi$  in  $\mathfrak{Q}_n^{\nu,M}$  liegt, d. h.  $\varsigma_{n,m}^\nu \in \mathfrak{Q}_n^{\nu,M}$  mit  $\varsigma_{2,m}^\nu$  gegeben in Polarkoordinaten durch

$$\varsigma_{2,m}^\nu(\rho, \varphi) := \xi(\rho) \rho^{\sqrt{1/4-\nu^2}-1/2} \frac{e^{-i(m+1/2)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

und  $\varsigma_{3,m}^\nu$  gegeben in Kugelkoordinaten durch

$$\varsigma_{3,m}^\nu(r, \theta, \phi) := \xi(r) r^{\sqrt{1-\nu^2}-1} \Omega_{1/2+m_2, m_1, -m_2}(\theta, \phi).$$

Wir erreichen dieses Ziel durch die Anwendung von Lemma 3.4.4 (siehe Abschnitt 3.4.2) auf eine spezielle Folge. Dies geschieht in Abschnitt 3.4.3.

### 3.4.1 Determinierende Bereiche für Coulomb-Dirac-Operatoren

Zunächst untersuchen wir in Lemma 3.4.1 die Coulomb-Dirac-Operatoren auf der Halbachse. Aus diesem Resultat schlussfolgern wir, dass  $\mathfrak{C}_n^\nu$  ein determinierender Bereich für  $\mathbf{D}_n^{\nu,M}$  ist.

**Lemma 3.4.1** (Verallgemeinerung von Lemma 15 in [49]). *Seien  $\nu \in [0, (n-1)/2]$ ,  $\kappa \in (\mathbb{Z} + (3-n)/2) \setminus \{0\}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  und*

$$\mathfrak{C}_\theta^{\nu,\kappa} := \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) + \begin{cases} \text{span}\{\xi_n^\nu(\sin \theta \Psi_M^{\nu,\kappa} + \cos \theta \Psi_U^{\nu,\kappa})\} & \text{für } \kappa^2 - \nu^2 < 1/4, \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

*Hier sind  $\Psi_M^{\nu,\kappa}$  und  $\Psi_U^{\nu,\kappa}$  in (2.6.2) und (2.6.3) definiert. Dann ist der Abschluss der Einschränkung von  $(\tilde{D}^{\nu,\kappa})^*$  (definiert zu Beginn von Abschnitt 2.6.1) auf  $\mathfrak{C}_\theta^{\nu,\kappa}$  in  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  gleich  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  (definiert in Satz 2.6.1) für  $\kappa^2 - \nu^2 < 1/4$  und  $D_{\pi/2}^{\nu,\kappa}$  sonst.*

*Beweis.* Für  $\kappa^2 - \nu^2 \geq 1/4$  folgt die Behauptung aus Teil (2) von Satz 2.6.1. Daher nehmen wir nun an, dass  $\kappa^2 - \nu^2 < 1/4$  gilt. Außerdem bezeichnen wir den Abschluss von  $\tilde{D}^{\nu,\kappa}$  als minimalen Operator  $D_{\min}^{\nu,\kappa}$ .

Wie bereits in Abschnitt 2.6.1 diskutiert, ist der Differentialausdruck  $d^{\nu,\kappa}$  (definiert in (2.6.1)) bei null im Grenzkreisfall und bei unendlich im Grenzpunktfall. Dementsprechend hat  $D_{\min}^{\nu,\kappa}$  die Defektindizes  $(1, 1)$ . In diesem Fall ist jede eindimensionale Fortsetzung von  $D_{\min}^{\nu,\kappa}$ , welche eine Einschränkung von  $(\tilde{D}^{\nu,\kappa})^*$  ist, selbstadjungiert (siehe z. B. Abschnitt 4.4.1 in [3]).

Satz 1.5(2) in [82] impliziert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle \psi(\varepsilon), i\sigma_2 v(\varepsilon) \rangle_{\mathbb{C}^2} = 0 \quad \text{für alle } \psi \in \mathfrak{D}(D_{\min}^{\nu,\kappa}), \quad v \in \mathfrak{D}((\tilde{D}^{\nu,\kappa})^*). \quad (3.4.2)$$

Wählt man nun  $v := \xi_n^\nu(\cos \theta \Psi_M^{\nu, \kappa} + \sin \theta \Psi_U^{\nu, \kappa})$  (möglich nach (2.2.8)) in (3.4.2), so schlussfolgern wir  $\xi_n^\nu(\sin \theta \Psi_M^{\nu, \kappa} + \cos \theta \Psi_U^{\nu, \kappa}) \notin \mathfrak{D}(D_{\min}^{\nu, \kappa})$ . Daher ist der Abschluss der Einschränkung von  $(\tilde{D}^{\nu, \kappa})^*$  auf  $\mathfrak{C}_\theta^{\nu, \kappa}$  eine eindimensionale Fortsetzung von  $D_{\min}^{\nu, \kappa}$  und deshalb ein selbstadjungierter Operator. Dieser selbstadjungierte Operator ist gleich  $D_\theta^{\nu, \kappa}$ , wenn  $\mathfrak{C}_\theta^{\nu, \kappa}$  in  $\mathfrak{D}(D_\theta^{\nu, \kappa})$  enthalten ist. Dies ist aber nach der Charakterisierung des Definitionsbereiches von  $D_\theta^{\nu, \kappa}$  in (2.6.4) der Fall.  $\square$

Im nachfolgenden Lemma, Beweis und Hinweis werden mathematische Objekte verwendet, welche in (1.0.3), (2.6.16), (2.6.17), (2.6.22), (2.6.23), (2.6.25) und (2.6.28) eingeführt wurden.

**Lemma 3.4.2** (Lemma 14 in [53]). *Seien  $\nu \in [0, (n-1)/2]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  und  $M \geq 0$ . Der Abschluss der Einschränkung von  $(\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}))^*$  auf  $(\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \mathfrak{C}_\theta^{\nu, \kappa_j}$  ist*

$$(\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \left( \bigoplus_{\substack{j \in \mathfrak{T}_n \\ \kappa_j < 1/4}} (D_\theta^{\nu, \kappa_j} + M\sigma_3) \bigoplus_{\substack{j \in \mathfrak{T}_n \\ \kappa_j \geq 1/4}} (D_{\pi/2}^{\nu, \kappa_j} + M\sigma_3) \right) \mathcal{A}_n \mathcal{S}_n. \quad (3.4.3)$$

*Beweis.* Die Relation

$$(\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}))^* = (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} (\tilde{D}^{\nu, \kappa_j} + M\sigma_3)^* \right) \mathcal{A}_n \mathcal{S}_n \quad (3.4.4)$$

gilt für  $n = 2$  nach Abschnitt 7.3.3 in [73] und für  $n = 3$  nach Abschnitt 2.1 in [2]. Aus (3.4.4), Lemma 3.4.1 und der Tatsache, dass der Operator  $\sigma_3$  in  $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  beschränkt ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Hinweis 3.4.3.** *Seien  $\nu \in [0, (n-1)/2]$ ,  $M \geq 0$  und  $j \in \mathfrak{T}_n$ .*

(a) *Aus Lemma 3.4.2 und der Relation*

$$\mathfrak{C}_n^\nu = (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \mathfrak{C}_{\pi/2}^{\nu, \kappa_j} \quad (3.4.5)$$

*folgt, dass die Einschränkung von  $(\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot| \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}))^*$  auf  $\mathfrak{C}_n^\nu$  wesentlich selbstadjungiert ist und dessen Abschluss unabhängig von der speziellen Wahl von  $\xi_n^\nu$  ist.*

(b) *Mit der Einbettung*

$$H^{1/2}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n, (1 + |\mathbf{x}|^{-1})d\mathbf{x}) \quad (3.4.6)$$

und (1.0.4) sowie (3.4.4) erhalten wir, dass der Definitionsbereich von  $((\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n) D_n^M(-\nu/|\cdot| \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}) (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^*)_j$  in  $L^2(\mathbb{R}_+, (1 + r^{-1})dr)$  liegt. Daher gibt es eine selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{D}^{\nu, \mathfrak{z}_j}$  mit Definitionsbereich in  $L^2(\mathbb{R}_+, (1 + r^{-1})dr)$ . Weil  $\xi_n^\nu \Psi_U^{\nu, \mathfrak{z}_j} \notin L^2(\mathbb{R}_+, (1 + r^{-1})dr)$  für  $\nu > 0$  gilt, folgt aus Satz 2.6.1, dass  $D_{\pi/2}^{\nu, \mathfrak{z}_j}$  die eindeutige selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{D}^{\nu, \mathfrak{z}_j}$  mit Definitionsbereich in  $L^2(\mathbb{R}_+, (1 + r^{-1})dr)$  ist. Daher erhalten wir

$$((\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n) D_n^M(-\nu/|\cdot| \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}) (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^*)_j = D_{\pi/2}^{\nu, \mathfrak{z}_j}.$$

Zusammen mit Lemma 3.4.2 und (3.4.5) schlussfolgern wir, dass der Abschluss von  $(\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot| \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}))^*$  eingeschränkt auf  $\mathfrak{E}_n^\nu$  gleich  $D_n^M(-\nu/|\cdot| \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  ist.

(c) *Nach Lemma 3.4.2 existiert eine selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{D}_n^M(-\nu/|\cdot| \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$ , welche aber nicht eindeutig sein muss.*

(d) *Nach Satz 2.6.1 stimmt jede selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{D}^{\nu, \mathfrak{z}_j}$  mit  $D_\theta^{\nu, \mathfrak{z}_j}$  für ein  $\theta \in [0, \pi)$  überein. Daher folgt aus Lemma 3.4.2, (3.4.6) und der Tatsache, dass  $\xi_n^\nu \Psi_M^{(n-1)/2, (n-1)/2}$  und  $\xi_n^\nu \Psi_U^{(n-1)/2, (n-1)/2}$  nicht in  $L^2(\mathbb{R}_+, (1 + r^{-1})dr)$  liegen, dass  $\tilde{D}_n^M((1-n)(2|\cdot|)^{-1} \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  keine selbstadjungierte Fortsetzung besitzt, welche in  $H^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  liegt.*

### 3.4.2 Eine abstrakte Charakterisierung des Definitionsbereiches des Abschlusses einer quadratischen Form

**Lemma 3.4.4** (Lemma 16 in [53]). *Seien  $\mathbf{q}$  eine abschließbare und nichtnegative quadratische Form auf dem dichten linearen Teilraum  $\mathfrak{Q}$  des Hilbertraumes  $\mathfrak{H}$  und  $\psi \in \mathfrak{H}$ . Falls es eine Folge  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{Q}$  mit  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{q}[\psi_k] < \infty$  gibt, welche schwach gegen  $\psi$  konvergiert, dann ist  $\psi$  im Definitionsbereich des Abschlusses von  $\mathbf{q}$ .*

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $\bar{\mathbf{q}}$  den Abschluss von  $\mathbf{q}$  und mit  $\bar{\mathfrak{Q}}$  den Definitionsbereich von  $\bar{\mathbf{q}}$ . Nach Satz 2.13 in [72] ( $B^2$  entspricht dort  $A$ ) gibt es einen selbstadjungierten Operator  $B : \bar{\mathfrak{Q}} \rightarrow \mathfrak{H}$  mit

$$\bar{\mathbf{q}}[v] = \|Bv\|^2 \text{ für alle } v \in \bar{\mathfrak{Q}}.$$

Daher gilt

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|B\psi_k\|^2 < \infty.$$

Deshalb gibt es nach dem Satz von Banach-Alaoglu ein  $\Psi \in \mathfrak{H}$  und eine Teilfolge  $(B\psi_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$  von  $(B\psi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{H}$ , welche schwach gegen  $\Psi$  konvergiert. Daraus folgt, dass  $((\psi_{k_m}, B\psi_{k_m}))_{m \in \mathbb{N}}$  schwach gegen  $(\psi, \Psi) \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$  konvergiert. Aus der Abgeschlossenheit des Graphen von  $B$  und Satz 8 in Abschnitt 1.9 von [11] schlussfolgern wir die Behauptung.  $\square$

### 3.4.3 Anwendung von Lemma 3.4.4

Zunächst definieren wir eine Folge. Dazu wählen wir  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ , sodass  $v(r) = \xi(r)$  für alle  $r \in [1, \infty)$  und  $0 \leq v(r) \leq 1$  für  $r \in (0, 1)$  gilt. Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Wir definieren

$$v_k(r) := \begin{cases} v(kr) & \text{für } r \in (0, 1/k], \\ 1 & \text{für } r \in (1/k, 1], \\ \xi(r) & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Funktion  $\varsigma_{2,m,k}^\nu$  in Polarkoordinaten durch

$$\varsigma_{2,m,k}^\nu(\rho, \varphi) := v_k(\rho) \rho^{\sqrt{1/4-\nu^2}-1/2} \frac{e^{-i(m+1/2)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

sowie  $\varsigma_{3,m,k}^\nu$  in Kugelkoordinaten durch

$$\varsigma_{3,m,k}^\nu(r, \theta, \phi) := v_k(r) r^{\sqrt{1-\nu^2}-1} \Omega_{1/2+m_2, m_1, -m_2}(\theta, \phi).$$

Die Folge  $(\varsigma_{n,m,k}^\nu)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $\varsigma_{n,m}^\nu$  in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N/2})$ . Nach Lemma 3.4.4 ist es deshalb ausreichend zu zeigen, dass

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{q}_n^{\nu, M}[\varsigma_{n,m,k}^\nu] < \infty \quad (3.4.7)$$

gilt. Sei  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N/2})$ . Zuerst erkennen wir

$$\mathbf{q}_n^{\nu, M}[\psi] \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|\mathbf{x}|}{\nu} |K_n \psi(\mathbf{x})|^2 - \frac{\nu}{|\mathbf{x}|} |\psi(\mathbf{x})|^2 + M |\psi(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (3.4.8)$$

Eine aufwändige Rechnung zeigt

$$K_n = \begin{cases} -ie^{i\varphi} (\partial_\varphi - \frac{1}{\rho} A_2) & \text{mit } A_2 := -i\partial_\varphi \text{ falls } n = 2, \\ -i \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) \left( \partial_r - \frac{1}{r} A_3 \right) & \text{mit } A_3 := \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\mathbf{x} \wedge \nabla) \text{ falls } n = 3. \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Durch die Verwendung von (3.4.9) und partieller Integration erhalten wir, dass die rechte Seite von (3.4.8) gleich

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|\mathbf{x}| |\partial_{|\mathbf{x}|} \psi(\mathbf{x})|^2}{\nu} + \frac{|((n-1)/2 + A_n) \psi(\mathbf{x})|^2}{\nu |\mathbf{x}|} \right) \quad (3.4.10)$$

$$- \frac{\left( \nu + \frac{(n-1)^2}{4\nu} \right) |\psi(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{x}|} + M |\psi(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x} \quad (3.4.11)$$

ist. Aus (3.4.10) und Relation 2.1.37 in [2] schlussfolgern wir

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|\mathbf{x}|}{\nu} |K_n \varsigma_{n,m,k}^\nu(\mathbf{x})|^2 - \frac{\nu}{|\mathbf{x}|} |\varsigma_{n,m,k}^\nu(\mathbf{x})|^2 + M |\varsigma_{n,m,k}^\nu(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{t^n}{\nu} \left| \partial_t v_k(t) t^{\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2} - (n-1)/2} \right|^2 \right. \\ & \quad \left. - \nu v_k(t)^2 t^{2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2} - 1} + M v_k(t)^2 t^{2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2}} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Eine Rechnung zeigt, dass (3.4.12) gleich

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left( \nu^{-1} v'_k(t)^2 t^{2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2} + 1} + M v_k(t)^2 t^{2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2}} \right) dt \\ &= \int_0^{1/k} \nu^{-1} k^2 v'(kt)^2 t^{2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2} + 1} dt + \int_1^\infty \nu^{-1} v'(t)^2 t^{2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2} + 1} dt \\ & \quad + M \int_0^\infty v_k(t)^2 t^{2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2}} dt \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

ist. Eine obere Schranke auf den Ausdruck (3.4.13) ist

$$\int_0^\infty \nu^{-1} v'(t)^2 t^{2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2} + 1} dt + M \int_0^\infty \xi(t)^2 t^{2\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2}} dt. \quad (3.4.14)$$

Die Kombination von (3.4.14), (3.4.13) (3.4.12) und (3.4.8) impliziert (3.4.7).



### 3.5 Beweis von Satz 2.3.1 und 2.3.4

Um die Ungleichungen (2.3.1) für die Beträge der Coulomb-Dirac-Operatoren zu beweisen, würden wir gerne die Ungleichungen (2.3.6) für die Quadrate der Coulomb-Dirac-Operatoren beweisen und anschließend aufgrund der Monotonie der Wurzel für Operatoren (2.3.1) schlussfolgern. Wie aber bereits im Zusammenhang mit den Ungleichungen (2.3.6) erläutert, schlägt diese Strategie für  $n = 2$  komplett fehl. Mit Satz 2.2.3 kann die dort getroffene Aussage dahingehend präzisiert werden, dass es für alle  $j \in \mathfrak{T}_n$  mit  $\kappa_j^2 - \nu^2 < 1/4$  (siehe 2.6.25) kein  $K_{n,j}^\nu > 0$  gibt, sodass im Kanal (siehe (2.6.28), (2.6.22) und (2.6.23))

$$\mathfrak{H}_{n,j} := (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \bigoplus_{j' \in \mathfrak{T}_n} \delta_{j',j} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) \quad (3.5.1)$$

die Ungleichung

$$(\mathbf{D}_n^\nu)^2 \geq K_{n,j}^\nu(-\Delta) \quad (3.5.2)$$

gilt. Dementsprechend bezeichnen wir  $\mathfrak{H}_{n,j}$  für  $j \in \mathfrak{T}_n$  und  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  mit  $\kappa_j^2 - \nu^2 \leq 1/4$  als kritischen Kanal. Die Beweisidee besteht nun darin einen Operator  $O_{n,j}^\nu$  in  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$  zu finden, welcher wie  $\mathbf{D}_n^\nu$  durch  $\mathfrak{H}_{n,j}$  reduziert wird, homogen vom Grad minus eins ist und in  $\mathfrak{H}_{n,j}$  die Ungleichung

$$(\mathbf{D}_n^\nu)^2 \geq C_{n,j}^\nu (O_{n,j}^\nu)^2 \quad (3.5.3)$$

mit  $C_{n,j}^\nu > 0$  erfüllt. Außerdem muss in  $\mathfrak{H}_{n,j}$  für  $\nu \in [0, (n-1)/2]$

$$O_{n,j}^\nu \geq \tilde{C}_{n,j}^\nu \sqrt{-\Delta} \quad (3.5.4)$$

mit  $\tilde{C}_{n,j}^\nu > 0$  gelten und im Fall  $\nu = (n-1)/2$

$$O_{n,j}^{(n-1)/2} \geq K_n^{\nu,\lambda} a^{\lambda-1} (-\Delta)^{\lambda/2} - a^{-1} \quad (3.5.5)$$

mit  $K_n^{\nu,\lambda} > 0$  für alle  $a > 0$  und  $\lambda \in [0, 1)$  erfüllt sein. Als ersten Ansatz für diesen Operator wählen wir

$$\left( \sqrt{-\Delta} - \frac{\alpha_j^\nu}{|\cdot|} \right) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N} \quad (3.5.6)$$

mit einem noch festzulegenden  $\alpha_j^\nu \leq 2\Gamma^2((n+1)/4)/\Gamma^2((n-1)/4)$ . Aufgrund der Rotationsinvarianz des Ansatzes erkennen wir, dass nur noch die Forderungen (3.5.3), (3.5.4) beziehungsweise (3.5.5) überprüft werden

müssen.

Um Ungleichung (3.5.3) zu beweisen, stellt sich natürlich die Frage, wie man die Quadrate von  $\mathbf{D}_n^\nu$  und (3.5.6) vergleichen kann. Deshalb beginnen wir zunächst in Abschnitt 3.5.1 damit eine Reihe unitärer Transformationen einzuführen, deren spezielle Kombination eine Darstellung von  $\mathbf{D}_n^\nu$  und (3.5.6) liefert, welche die Untersuchung der Gültigkeit von (3.5.3) ermöglicht.

Für diese Gültigkeit muss zumindest  $\mathfrak{D}(\mathbf{D}_n^\nu) \cap \mathfrak{H}_{n,j}$  im Definitionsbereich von (3.5.6) enthalten sein. Daher untersuchen wir in Abschnitt 3.5.2 den Definitionsbereich der Reduktion von (3.5.6) auf  $\mathfrak{H}_{n,j}$ . In diesem Zusammenhang zeigt sich, dass die Reduktion von (3.5.6) auf  $\mathfrak{H}_{2,0}$  viel komplizierter zu analysieren ist als alle Anderen. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass in zwei Dimensionen im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall keine Hardy-Ungleichung existiert.

Die bereits erwähnte Inklusion  $\mathfrak{D}(\mathbf{D}_n^\nu) \cap \mathfrak{H}_{n,j} \subset \mathfrak{D}(O_{n,j}^\nu)$  bedeutet für unseren Ansatz, dass  $\zeta_{n,m}^\nu \in \mathfrak{D}(O_{n,j}^\nu)$  für ein  $m \in \{-1/2, 1/2\}^{n-1}$  gelten muss. Da aber der Drehimpuls der oberen  $N/2$  Komponenten von  $\zeta_{n,m}^\nu$  anders ist als der Drehimpuls der unteren  $N/2$  Komponenten, kann dies nicht gelten. Daher modifizieren wir unseren Ansatz und legen letztendlich  $O_{n,j}^\nu$  in den kritischen Kanälen durch

$$O_{2,j}^\nu = \text{diag} \left( \sqrt{-\Delta} - \frac{\alpha_j^\nu}{|\cdot|}, \sqrt{-\Delta} - \frac{\tilde{\alpha}_j^\nu}{|\cdot|} \right) \quad (3.5.7)$$

und

$$O_{3,j}^\nu = M_j \left( \left( \sqrt{-\Delta} - \frac{\alpha_j^\nu}{|\cdot|} \right) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^4} \right) M_j \quad (3.5.8)$$

mit

$$M_j := \begin{pmatrix} \left( -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\nabla}{\sqrt{-\Delta}} \right)^{|\kappa_j - 1/2| - 1/2} & 0_{\mathbb{C}^2} \\ 0_{\mathbb{C}^2} & \left( -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\nabla}{\sqrt{-\Delta}} \right)^{|\kappa_j - 1/2| + 1/2} \end{pmatrix} \quad (3.5.9)$$

fest. Dabei wählen wir  $\alpha_j^\nu$  und  $\tilde{\alpha}_j^\nu$  nach unseren Erkenntnissen aus Abschnitt 3.5.2. Der Unterschied bei der Wahl des Vergleichsoperators für die verschiedenen Dimensionen liegt an der bereits erwähnten Tatsache, dass die Reduktion von (3.5.6) auf  $\mathfrak{H}_{2,0}$  einige Besonderheiten aufweist. So könnte man  $O_{2,j}^\nu$  nicht analog zur getroffenen Wahl von  $O_{3,j}^\nu$  wählen aber  $O_{3,j}^\nu$  analog zur getroffenen Wahl von  $O_{2,j}^\nu$ . Da aber die spezielle Wahl von  $O_{3,j}^\nu$  die explizite Bestimmung einer unteren Schranke auf den optimalen Wert von  $C_3^\nu$  erleichtert (siehe Satz 2.3.2), verzichten wir darauf.

In Abschnitt 3.5.4 beweisen wir für die in (3.5.7) und (3.5.8) getroffene Wahl

von  $O_{n,j}^\nu$  die Ungleichung (3.5.3) in den kritischen Kanälen, d. h.  $\psi \in \mathfrak{H}_{n,j}$  und  $\varkappa_j^2 - \nu^2 \leq 1/4$ . In den nicht kritischen Kanälen zeigen wir (3.5.2) in Abschnitt 3.5.5. Da  $\mathbf{D}_n^\nu$ ,  $\sqrt{-\Delta}$  und  $O_{n,j}^\nu$  durch  $\mathfrak{H}_{n,j}$  reduziert werden, sind die Ergebnisse mit den reduzierten Operatoren formuliert.

Um nun (3.5.4) und (3.5.5) überprüfen zu können, beweisen wir für die Reduktion eines relativistischen Coulomb-Operators auf einen beliebigen Kanal eine Version der Herbst-Ungleichung (siehe Satz 2.5 in [39]) in Abschnitt 3.5.2 und eine Version von (2.3.7) in Abschnitt 3.5.3.

Abschließend werden die gewonnenen Resultate in Abschnitt 3.5.6 verwendet um Satz 2.3.1 zu beweisen und zum Beweis von Satz 2.3.4 in Abschnitt 3.5.7.

### 3.5.1 Mellin-, Fourier- und ähnliche Transformationen

In diesem Abschnitt führen wir verschiedene unitäre Transformationen ein. Außerdem formulieren und beweisen wir verschiedene technische Resultate, welche in den nächsten Abschnitten Verwendung finden werden.

**Fourier-Transformation in Polar- und Kugelkoordinaten** Die in (3.2.1) eingeführte Fourier-Transformation ist in Polarkoordinaten für  $\chi \in \mathbf{L}^1([0, \infty) \times [0, 2\pi)) \cap \mathbf{L}^2([0, \infty) \times [0, 2\pi))$  und in Kugelkoordinaten für  $v \in \mathbf{L}^1([0, \infty) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)) \cap \mathbf{L}^2([0, \infty) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi))$  gegeben durch

$$\mathcal{F}_2\chi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (p, \omega) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ip\rho \cos(\omega-\varphi)} \chi(\rho, \varphi) d\varphi \rho d\rho \quad (3.5.10)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3v : [0, \infty) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (k, \vartheta, \varpi) &\mapsto \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-ikr(\sin\theta \sin\vartheta \cos(\phi-\varpi) + \cos\theta \cos\vartheta)} \\ &\quad \times v(r, \theta, \phi) d\phi \sin\theta d\theta r^2 dr. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

**Lemma 3.5.1** (Lemma 5 in [49] und Lemma II.1 in [50]). *Sei  $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty([0, \infty))$ .*

(a) *Für  $k \in \mathbb{Z}$  ist die Fourier-Transformation von*

$$\Psi^k(\rho, \varphi) := \rho^{-1/2} \psi(\rho) e^{ik\varphi} \quad (3.5.12)$$

*in Polarkoordinaten gegeben durch*

$$\mathcal{F}_2(\Psi^k)(p, \omega) = (-i)^k e^{ik\omega} \int_0^\infty \sqrt{\rho} J_k(p\rho) \psi(\rho) d\rho. \quad (3.5.13)$$

(b) Für  $(l, m, s) \in \mathfrak{T}_3$  ist die Fourier-Transformation von

$$\Psi^{(l,m,s)}(r, \theta, \phi) := r^{-1} \psi(r) \Omega_{l,m,s}(\theta, \phi) \quad (3.5.14)$$

in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$(\mathcal{F}_3 \Psi^{(l,m,s)})(k, \vartheta, \varpi) = (-i)^l \int_0^\infty \sqrt{\frac{r}{k}} J_{l+1/2}(rk) \psi(r) dr \Omega_{l,m,s}(\vartheta, \varpi). \quad (3.5.15)$$

*Beweis.* Zu (a): Nach 10.9.2 und 10.2.2 in [55] gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{-ip\rho \cos(\omega-\varphi)} e^{ik\varphi} d\varphi = 2\pi i^k J_k(-p\rho) e^{ik\omega} = 2\pi (-i)^k J_k(p\rho) e^{ik\omega}. \quad (3.5.16)$$

Durch das Einsetzen von (3.5.12) in (3.5.10) und die Verwendung von (3.5.16) erhalten wir (3.5.13).

Zu (b): Nach 10.60.7, 14.7.1, 14.7.17, 14.30.9 und 10.47.3 in [55] gilt die Relation

$$\begin{aligned} & \exp\left(-ikr(\sin\theta \sin\vartheta \cos(\phi - \varpi) + \cos\theta \cos\vartheta)\right) \\ &= (2\pi)^{3/2} \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (rk)^{-1/2} J_{l+1/2}(rk) \sum_{m=-l}^l \overline{Y_{l,m}(\theta, \phi)} Y_{l,m}(\vartheta, \varpi). \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Hier sind für  $l \in \mathbb{N}_0$  und  $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$  die Funktionen  $Y_{l,m}$  die Kugelflächenfunktionen (siehe 14.30.1 in [55]). Durch das Einsetzen von (3.5.14) in (3.5.11) und die Verwendung von (3.5.17) zusammen mit (2.1.25), (2.1.26) in [2] und 14.30.8 in [55] erhalten wir (3.5.15).  $\square$

**Die Mellin-Transformation** Mit  $\mathcal{M}$  bezeichnen wir die unitäre Mellin-Transformation, welche zuerst auf  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$  durch

$$(\mathcal{M}\psi)(\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r^{-1/2-i\tau} \psi(r) dr \quad (3.5.18)$$

definiert wird und dann zu einem unitären Operator  $\mathcal{M} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  fortgesetzt wird, siehe z. B. [45].

**Definition 3.5.2.** Für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sei  $\mathfrak{D}^\lambda$  die Menge der Funktionen  $\psi$  in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , für welche ein  $\Psi$  existiert, welches analytisch im Streifen  $\mathfrak{S}^\lambda := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z/\lambda \in (0, 1)\}$  ist und die Eigenschaften

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow +0} \mathcal{L}^2 \Psi(\cdot + it\lambda) = \psi(\cdot),$$

(ii) der Grenzwert  $\mathbf{L}^2\text{-}\lim_{t \rightarrow 1-0} \Psi(\cdot + it\lambda)$  existiert,

$$(iii) \sup_{t \in (0,1)} \int_{\mathbb{R}} |\Psi(\tau + it\lambda)|^2 d\tau < \infty$$

besitzt.

Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei der Multiplikationsoperator  $r^\lambda$  in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, dr)$  auf seinem maximalen Definitionsbereich  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, (1 + r^{2\lambda})dr)$  definiert. Durch die Anwendung des Lemmas in [74] (Abschnitt 5.4, Seite 125), erhalten wir

**Satz 3.5.3.** *Sei  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Die Identität*

$$\mathfrak{D}^\lambda = \mathcal{M}\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, (1 + r^{2\lambda})dr)$$

*gilt und für jedes  $\psi \in \mathfrak{D}^\lambda$  erfüllt die Funktion  $\Psi$  aus Definition 3.5.2*

$$\Psi(z) = (\mathcal{M}r^{\text{Im } z}\mathcal{M}^*\psi)(\text{Re } z) \quad \text{für alle } z \in \mathfrak{S}^\lambda.$$

Daraus schlussfolgern wir, dass  $r^\lambda$  wie eine komplexe Verschiebung im Mellin-Raum wirkt. Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei  $R^\lambda : \mathfrak{D}^\lambda \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  ein linearer Operator definiert durch

$$R^\lambda \psi := \begin{cases} \mathbf{L}^2\text{-}\lim_{t \rightarrow 1-0} \Psi(\cdot + it\lambda) & \text{für } \lambda \neq 0, \\ \psi & \text{für } \lambda = 0, \end{cases}$$

mit  $\Psi$  wie in Definition 3.5.2. Es folgt aus Satz 3.5.3, dass  $R^\lambda$  wohldefiniert ist und

$$\mathcal{M}r^\lambda \mathcal{M}^* = R^\lambda \tag{3.5.19}$$

gilt (siehe Abschnitt II in [45]).

**Lemma 3.5.4** (Lemma 8 in [49] und Lemma II.3 in [50]). *Sei  $k \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{N}_0 + 1/2)$ . Die Relation*

$$\left( \mathcal{M} \left( (-i)^{\lfloor k \rfloor} \int_0^\infty \sqrt{r} J_k(\cdot r) \psi(r) dr \right) \right) (\tau) = \Xi_k(\tau) (\mathcal{M}\psi)(-\tau)$$

*gilt für jedes  $\psi \in C_0^\infty([0, \infty))$  und  $\tau \in \mathbb{R}$  mit*

$$\Xi_k(\tau) := (-i)^{\lfloor k \rfloor} 2^{-i\tau} \frac{\Gamma\left((|k| + 1 - i\tau)/2\right)}{\Gamma\left((|k| + 1 + i\tau)/2\right)}. \tag{3.5.20}$$

*Beweis.* Es ist ausreichend die Aussage für  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 + 1/2)$  zu zeigen, weil  $J_{-m} = (-1)^m J_m$  für  $m \in \mathbb{Z}$  nach 10.4.1 in [55] gilt. Nach 10.22.43 in [55] gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (-i)^{[k]} \int_0^R t^{-i\tau} J_k(t) dt = \Xi_k(\tau). \quad (3.5.21)$$

Daraus folgt

$$\sup_{L > 0} \left| \int_0^L t^{-i\tau} J_k(t) dt \right| < \infty.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Relation

$$\begin{aligned} & \left( \mathcal{M} \left( (-i)^{[k]} \int_0^\infty \sqrt{r} J_k(\cdot r) \psi(r) dr \right) \right) (\tau) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(-i)^{[k]}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^R p^{-i\tau} \int_{\text{supp } \psi} \sqrt{r} J_k(pr) \psi(r) dr dp \end{aligned}$$

nach den Sätzen von Fubini, der majorisierenden Konvergenz und (3.5.21).  $\square$

**Hinweis 3.5.5.** Für jedes  $k \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{N}_0 + 1/2)$  erlaubt die Funktion  $\Xi_k$ , welche in (3.5.20) eingeführt wurde, eine analytische Fortsetzung auf  $\mathbb{C} \setminus (-i(1 + |k| + 2\mathbb{N}_0))$ , während

$$\Xi_k^{-1}(\cdot) = \overline{\Xi_k(\bar{\cdot})} \quad (3.5.22)$$

auf  $\mathbb{C} \setminus (i(1 + |k| + 2\mathbb{N}_0))$  analytisch fortgesetzt werden kann.

**Lemma 3.5.6** (Verallgemeinerung von Lemma 10 in [49]). Für  $(k, \lambda) \in (\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N}_0 + 1/2)) \times [0, 1]$  und  $\psi \in \mathfrak{D}^\lambda \supset \mathfrak{D}^1$  mit

$$\Xi_k^{-1}\psi = \overline{\Xi_k(\bar{\cdot})}\psi \in \mathfrak{D}^\lambda \quad (3.5.23)$$

ist die Kommutatorregel

$$R^\lambda \Xi_k^{-1}\psi = \Xi_k^{-1}(\cdot + i\lambda) R^\lambda \psi \quad (3.5.24)$$

anwendbar. Außer für  $(k, \lambda) = (0, 1)$  ist die Bedingung (3.5.23) für jedes  $\psi \in \mathfrak{D}^\lambda$  automatisch erfüllt.

*Beweis.* Es folgt aus Hinweis 3.5.5, dass  $\Xi_k^{-1}$  analytisch ist in  $\mathfrak{S}^1$  und in einer komplexen Umgebung von  $\mathfrak{S}^\lambda$  für  $(k, \lambda) \neq (0, 1)$ . Mit der Hilfe der asymptotischen Sterling-Formel für die Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + O(|z|^{-1})\right) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |\arg z| < \pi - \delta, \quad \delta > 0 \quad (3.5.25)$$

(siehe z. B. 5.11.3 in [55]) schlussfolgern wir die Asymptotik

$$|\Xi_k^{-1}(z)| = |\overline{\Xi_k(\bar{z})}| = |\operatorname{Re} z|^{-\operatorname{Im} z} \left(1 + O(|z|^{-1})\right) \text{ für } z \in \mathfrak{S}^1, \text{ wenn } |z| \rightarrow \infty. \quad (3.5.26)$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} \Xi_k^{-1} \text{ ist analytisch und beschränkt in} \\ \mathfrak{S}^\lambda \text{ für alle } (k, \lambda) \in ((\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N}_0 + 1/2)) \times [0, 1]) \setminus \{(0, 1)\} \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

und somit die letzte Aussage des Lemmas.

Weil  $\psi \in \mathfrak{D}^\lambda$  gilt, gibt es ein  $\Psi$  wie in Definition 3.5.2. Analogher Weise gibt es nach (3.5.23) ein  $\Phi$  analytisch in  $\mathfrak{S}^\lambda$ , welches zu  $v := \Xi_k^{-1}\psi$  in Definition 3.5.2 korrespondiert. Dann gilt  $v, \psi \in \mathfrak{D}^{\lambda/2}$  und nach (3.5.27)

$$\Phi(\cdot + i\lambda/2) = R^{\lambda/2}v = R^{\lambda/2}\Xi_k^{-1}\psi = \Xi_k^{-1}(\cdot + i\lambda/2)\Psi(\cdot + i\lambda/2)$$

auf  $\mathbb{R}$ . Daher müssen  $\Phi$  und  $\Xi_k^{-1}\Psi$  auf ihrem gemeinsamen Analytizitätsbereich  $\mathfrak{S}^\lambda$  übereinstimmen. Weil  $R^\lambda \Xi_k^{-1}\psi = \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{t \rightarrow 1-0} \Phi(\cdot + it\lambda)$  existiert, muss es als Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{t \rightarrow 1-0} \Xi_k^{-1}(\cdot + it\lambda)\Psi(\cdot + it\lambda) &= \Xi_k^{-1}(\cdot + i\lambda) \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{t \rightarrow 1-0} \Psi(\cdot + it\lambda) \\ &= \Xi_k^{-1}(\cdot + i\lambda)R^\lambda\psi \end{aligned} \quad (3.5.28)$$

übereinstimmen, wobei die erste Gleichung in (3.5.28) durch den Übergang zu einer fast überall konvergenten Teilfolge gerechtfertigt werden kann.  $\square$

Durch die Multiplikation von (3.5.24) mit  $\Xi_k$  schlussfolgern wir für  $\lambda = 1$  das nachfolgende Korollar.

**Korollar 3.5.7** (Korollar 11 in [49] und Lemma II.5 in [50]). *Seien  $k \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{N}_0 + 1/2)$  und  $\psi \in \mathfrak{D}^1$  und im Fall  $k = 0$  gelte zusätzlich  $\Xi_0^{-1}\psi \in \mathfrak{D}^1$ . Dann gilt die Identität*

$$\Xi_k R^1 \Xi_k^{-1} \psi = V_{|k|-1/2}(\cdot + i/2) R^1 \psi$$

mit

$$V_l(z) := \frac{\Gamma((l+1+iz)/2)\Gamma((l+1-iz)/2)}{2\Gamma((l+2+iz)/2)\Gamma((l+2-iz)/2)} \quad (3.5.29)$$

für  $l \in (\mathbb{N}_0 - 1/2) \cup \mathbb{N}_0$  und  $z \in (\mathbb{C} \setminus i(\mathbb{Z} + l)) \cup \{0\}$ .

Wir benötigen die nachfolgenden Eigenschaften von (3.5.29):

**Lemma 3.5.8** (Lemma 12 in [49] und Lemma II.6 in [50]). *Für jedes  $k \in (N_0 - 1/2) \cup \mathbb{N}_0$  ist die Funktion  $V_k$  analytisch in  $(\mathbb{C} \setminus i(\mathbb{Z} + k)) \cup \{0\}$  und hat die folgenden Eigenschaften:*

- (a)  $V_k(z) = V_k(-z)$  für alle  $z \in (\mathbb{C} \setminus i(\mathbb{Z} + k)) \cup \{0\}$ ,
- (b)  $V_k(\tau)$  ist positiv und strikt monoton fallend für  $\tau \in \mathbb{R}_+$ ,
- (c)  $V_k(i\zeta)$  ist positiv und strikt monoton wachsend für  $\zeta \in [0, k + 1)$ ,
- (d) Die Relation
$$(z^2 + (k + 1)^2)V_k(z) = (V_{k+1}(z))^{-1} \quad (3.5.30)$$
gilt für alle  $z \in (\mathbb{C} \setminus i(\mathbb{Z} + k)) \cup \{0\}$ .

*Beweis.* Zu (b): Für  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$  sei  $\psi(z) := \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  die Digamma-Funktion. Durch Differenzieren von (3.5.29) und die Verwendung von Formel 5.7.7 in [55] erhalten wir

$$\begin{aligned} V'_k(\tau) &= V_k(\tau) \operatorname{Im} \left( \psi((k + 2 + i\tau)/2) - \psi((k + 1 + i\tau)/2) \right) \\ &= 2\tau V_k(\tau) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{\tau^2 + (l + k + 1)^2} < 0 \quad \text{für alle } \tau > 0. \end{aligned}$$

Zu (c): Analog zu (b) berechnen wir

$$iV'_k(i\zeta) = 2\zeta V_k(i\zeta) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l + k + 1)^2 - \zeta^2} > 0 \quad \text{für alle } \zeta \in [0, k + 1).$$

Zu (d): Folgt direkt aus (3.5.29) und der Relation  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$  (gültig für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ ).  $\square$

**Drehimpulskanalzerlegung** An dieser Stelle möchten wir darauf hinweisen, dass die Drehimpulskanalzerlegung in  $n$  Dimensionen bereits am Anfang von Abschnitt 2.6.5 eingeführt wurde (siehe (2.6.16), (2.6.17), (2.6.22), (2.6.23), (2.6.25) und (2.6.28)). Daher wird hier nur ein determinierender Bereich für die Reduktion des Coulomb-Dirac-Operators  $\mathbf{D}_n^\nu$  auf einen beliebigen Drehimpulskanal angegeben. Dieses Resultat ist eine direkte Konsequenz aus Satz 2.2.3.

Wir definieren für  $\Upsilon \in [0, 1/2)$  und  $k \in \{-1, -1/2, 1/2, 1\}$  die Funktion

$$\psi_k^\Upsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_k^\Upsilon(r) := \sqrt{2\pi} e^{-r} r^\Upsilon \begin{pmatrix} \sqrt{k^2 - \Upsilon^2} \\ \Upsilon - k \end{pmatrix}. \quad (3.5.31)$$



**Lemma 3.5.9** (Lemma 15 in [49] und Lemma II.9 in [50]). *Seien  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  und  $j \in \mathfrak{I}_n$ . Die Menge*

$$\mathfrak{C}^{\nu, \mathfrak{x}_j} := \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) + \begin{cases} \text{span}\{\psi_{\mathfrak{x}_j}^{\sqrt{\mathfrak{x}_j^2 - \nu^2}}\} & \text{für } \mathfrak{x}_j^2 - \nu^2 < 1/4, \\ \{0\} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.5.32)$$

*ist ein determinierender Bereich für*

$$D^{\nu, \mathfrak{x}_j} := ((\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n) \mathbf{D}_n^\nu (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^*)_j. \quad (3.5.33)$$

*Außerdem gilt die Relation*

$$D^{\nu, \mathfrak{x}_j} = D_{\pi/2}^{\nu, \mathfrak{x}_j}, \quad (3.5.34)$$

*wobei die rechte Seite in Satz 2.6.1 definiert wurde.*

**MAF-Transformation** Wir führen die unitäre Transformation

$$\mathcal{W}_n : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N) \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2), \quad \mathcal{W}_n := \mathcal{M} \mathcal{A}_n \mathcal{F}_n \quad (3.5.35)$$

ein, wobei  $\mathcal{M}$  faserweise wirkt. Eine Rechnung, welche Lemma 3.5.1 und 3.5.4 verwendet, liefert für  $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  und  $v \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^4)$

$$\mathcal{W}_2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_m(\psi_1)_m \\ \mathcal{T}_{m+1}(\psi_2)_{m+1} \end{pmatrix} \quad (3.5.36)$$

und

$$\mathcal{W}_3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \bigoplus_{(l, m, s) \in \mathfrak{I}_3} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{l+1/2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{l, m, s} \\ \mathcal{T}_{l+2s+1/2} \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}_{l+2s, m, -s} \end{pmatrix}, \quad (3.5.37)$$

wobei für  $k \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{N}_0 + 1/2)$  der Operator  $\mathcal{T}_k : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  durch

$$(\mathcal{T}_k \chi)(\tau) := \Xi_k(\tau)(\mathcal{M} \chi)(-\tau) \quad \text{für alle } \chi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+) \quad (3.5.38)$$

definiert ist. In den nachfolgenden Lemmata studieren wir verschiedene Operatoren in MAF-Darstellung.

**Lemma 3.5.10** (Lemma 18 in [49] und Lemma II.10 in [50]). *Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Relationen*

$$\mathcal{W}_n^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} (R^1 \otimes \sigma_1) \right) \mathcal{W}_n = \mathbf{D}_n^0 \quad (3.5.39)$$

und

$$\mathcal{W}_n^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} (R^\lambda \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{C}^2}) \right) \mathcal{W}_n = (-\Delta)^{\lambda/2} \quad (3.5.40)$$

gelten.

*Beweis.* Zunächst beweisen wir (3.5.39) für  $n = 2$ . Sei  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$  beliebig. Durch die Anwendung von (3.5.35), (3.2.1) und (2.6.22) erhalten wir

$$\begin{aligned} W_2(-i\sigma \cdot \nabla) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &= \mathcal{M}\mathcal{A}_2 \begin{pmatrix} 0 & pe^{-i\omega} \\ pe^{i\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_2\psi_1 \\ \mathcal{F}_2\psi_2 \end{pmatrix} \\ &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}p \begin{pmatrix} (\mathcal{F}_2\psi_2)_{m+1} \\ (\mathcal{F}_2\psi_1)_m \end{pmatrix} = \left( \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (\mathcal{M}p\mathcal{M}^*) \otimes \sigma_1 \right) \mathcal{M}\mathcal{A}_2 \mathcal{F}_2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

welches nach (3.5.19) und (3.5.35) die Behauptung impliziert. Der dreidimensionale Fall kann durch eine ähnliche Rechnung bewiesen werden. Seien  $\chi, v \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ . Nach (3.5.35), (3.2.1), (2.6.23), (2.6.24), (3.2.11) gilt

$$\begin{aligned} W_3(-i\alpha \cdot \nabla) \begin{pmatrix} \chi \\ v \end{pmatrix} &= \mathcal{M}\mathcal{A}_3 \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_3v \\ \mathcal{F}_3\chi \end{pmatrix} \\ &= \bigoplus_{(l,m,s) \in \mathfrak{I}_3} \mathcal{M}p \begin{pmatrix} (\mathcal{F}_3v)_{(l+2s,m,-s)} \\ (\mathcal{F}_3\chi)_{(l,m,s)} \end{pmatrix} = \left( \bigoplus_{(l,m,s) \in \mathfrak{I}_3} (\mathcal{M}p\mathcal{M}^*) \otimes \sigma_1 \right) \mathcal{M}\mathcal{A}_3 \mathcal{F}_3 \begin{pmatrix} \chi \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In Kombination mit (3.5.19) und (3.5.35) folgt daraus die Behauptung (3.5.39) für  $n = 3$ .

Ersetzt man  $\begin{pmatrix} 0 & pe^{-i\omega} \\ pe^{i\omega} & 0 \end{pmatrix}$  beziehungsweise  $\begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & 0 \end{pmatrix}$  durch  $p^\lambda$ , so kann man durch die Verwendung der selben Argumente die Relation (3.5.40) beweisen.  $\square$

Für  $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cup (\mathbb{Z} + 1/2)$  definieren wir

$$\mu_\pm(k) := (k/|k|)^{2k+1} (k \pm 1/2). \quad (3.5.41)$$

**Lemma 3.5.11** (Lemma 19 in [49] und Lemma II.1 in [50]). *Die Relation*

$$\mathcal{W}_n | \cdot |^{-1} \mathcal{W}_n^* = \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \begin{pmatrix} \Xi_{\mu_-(\varkappa_j)} R^1 \Xi_{\mu_-(\varkappa_j)}^{-1} & 0 \\ 0 & \Xi_{\mu_+(\varkappa_j)} R^1 \Xi_{\mu_+(\varkappa_j)}^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.5.42)$$

gilt.

*Beweis.* Seien  $k \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{N}_0 + 1/2)$  und  $v \in L^2(\mathbb{R}_+, (1+r^{-2}) dr)$ . Nach (3.5.19) und (3.5.38) gilt für  $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{T}_k(| \cdot |^{-1} v) \right)(\tau) &= \Xi_k(\tau) \left( \mathcal{M}((\cdot)^{-1} v) \right)(-\tau) = \Xi_k(\tau) (R^{-1} \mathcal{M} v)(-\tau) \\ &= \Xi_k(\tau) \left( R^1 ((\mathcal{M} v)(-\cdot)) \right)(\tau) = \Xi_k(\tau) (R^1 \Xi_k^{-1} \mathcal{T}_k v)(\tau). \end{aligned}$$

Dies zusammen mit (3.5.36) und (3.5.37) impliziert (3.5.42).  $\square$

**U-Transformation** Für  $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \cup (\mathbb{Z} + 1/2)$  sei der unitäre Operator  $\mathcal{U}_k : L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$  definiert durch

$$\mathcal{U}_k \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\mu_-(k)} \psi_1 \\ -i \mathcal{T}_{\mu_+(k)} \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.5.43)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass für  $j \in \mathfrak{T}_n$  und  $(\psi_1, \psi_2) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  gilt

$$\mathcal{U}_{\varkappa_j} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left( \mathcal{W}_n(\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \bigoplus_{j' \in \mathfrak{T}_n} \delta_{j', j} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right)_j. \quad (3.5.44)$$

Eine Berechnung, welche (3.5.38), (3.5.18), (3.5.29), (3.5.30) und die elementaren Eigenschaften der Gammafunktion verwendet, liefert:

**Lemma 3.5.12** (Lemma 20 in [49] und Lemma II.12 in [50]). *Seien  $k \in \{-1, -1/2, 1/2, 1\}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\Upsilon \in [0, 1/2)$ . Die Funktionen (3.5.31) erfüllen die Relation*

$$(\mathcal{U}_k \psi_k^{\sqrt{k^2 - \Upsilon^2}})(\tau) = \chi_k^\Upsilon(\tau) \left( \frac{1}{\sqrt{k^2 - \Upsilon^2} V_{|k-1/2|-1/2}(i\Upsilon)} \right) + \begin{pmatrix} \xi_k^\Upsilon(\tau) \\ \eta_k^\Upsilon(\tau) \end{pmatrix}$$

mit

$$\chi_k^\Upsilon(\tau) := \sqrt{k^2 - \Upsilon^2} \Xi_{\mu_-(k)}(i(\Upsilon + 1/2)) \frac{(\tau - i)\Gamma(i\tau + \Upsilon + 1/2)}{i(\Upsilon - 1/2)}, \quad (3.5.45)$$

$$\xi_k^\Upsilon(\tau) := \sqrt{k^2 - \Upsilon^2} \Gamma(i\tau + \Upsilon + 1/2) \left( \Xi_{\mu_-(k)}(\tau) - \frac{(\tau - i)\Xi_{\mu_-(k)}(i(\Upsilon + 1/2))}{i(\Upsilon - 1/2)} \right), \quad (3.5.46)$$

$$\eta_k^\Upsilon(\tau) := i(k - \Upsilon)\Gamma(i\tau + \Upsilon + 1/2) \left( \Xi_{\mu_+(k)}(\tau) - \frac{(\tau - i)\Xi_{\mu_+(k)}(i(\Upsilon + 1/2))}{i(\Upsilon - 1/2)} \right). \quad (3.5.47)$$

### 3.5.2 Transformierte relativistische Coulomb-Operatoren

Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  betrachten wir den symmetrischen Operator

$$\tilde{H}^\alpha := (-\Delta)^{1/2} - \alpha |\cdot|^{-1}$$

in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  auf dem Definitionsbereich

$$\mathfrak{D}(\tilde{H}^\alpha) := H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, |\mathbf{x}|^{-2} d\mathbf{x}).$$

Nun führen wir die Indexmenge

$$\mathfrak{A}_n := \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 2, \\ \{(l, m) \in \mathbb{Z}^2 : l \geq 0, -l \leq m \leq l\} & \text{für } n = 3, \end{cases} \quad (3.5.48)$$

ein. Für eine Funktion  $v \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$  ist die Entwicklung der Darstellung von  $v$  in Polarkoordinaten in der Orthonormalbasis  $((2\pi)^{-1/2} e^{im(\cdot)})_{m \in \mathbb{Z}}$  bereits in (2.6.18) und (2.6.20) definiert. Für jede skalare Funktion  $u \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$  ist die Entwicklung der Darstellung von  $u$  in Kugelkoordinaten in Kugelflächenfunktionen (siehe Abschnitt 14.30 in [55]) gegeben durch

$$u(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) = \sum_{(l, m) \in \mathfrak{A}_3} r^{-1} u_{(l, m)}(r) Y_{l, m}(\theta, \phi), \quad (3.5.49)$$

$$u_{(l, m)}(r) := r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{Y_{l, m}(\theta, \phi)} u(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (3.5.50)$$

Der zugehörige unitäre Operator ist

$$\mathcal{R}_n : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{j \in \mathfrak{A}_n} L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}), \quad \psi \mapsto \bigoplus_{j \in \mathfrak{A}_n} \psi_j. \quad (3.5.51)$$

Mit Korollar 3.5.7 und skalaren Versionen der Lemmata 3.5.10 und 3.5.11 erhalten wir

$$\begin{aligned} & (\mathcal{MR}_n \mathcal{F}_n) \tilde{H}^\alpha (\mathcal{MR}_n \mathcal{F}_n)^* \\ &= \begin{cases} \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (1 - \alpha V_{|m|-1/2}(\cdot + i/2)) R^1 =: \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{H}_{|m|-1/2}^\alpha & \text{falls } n = 2, \\ \bigoplus_{(l, m) \in \mathfrak{A}_3} (1 - \alpha V_l(\cdot + i/2)) R^1 =: \bigoplus_{(l, m) \in \mathfrak{A}_3} \tilde{H}_l^\alpha & \text{falls } n = 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5.52)$$

$$(3.5.53)$$

wobei die rechte Seite eine orthogonale Summe der Operatoren in  $L^2(\mathbb{R})$  ist, welche für  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$  und  $\alpha \neq 0$  dicht auf

$$\mathfrak{D}(\tilde{H}_k^\alpha) := \{v \in \mathfrak{D}^1 : \Xi_{k+1/2}^{-1} v \in \mathfrak{D}^1\} \quad (3.5.54)$$

definiert sind. Für  $k \in (\mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)) \setminus \{-1/2\}$  gilt  $\mathfrak{D}(\tilde{H}_k^\alpha) = \mathfrak{D}^1$  nach Lemma 3.5.6. Auf der anderen Seite ist  $\mathfrak{D}(\tilde{H}_{-1/2}^\alpha) \neq \mathfrak{D}^1$  für jedes  $\alpha \neq 0$ . Diese Tatsache korrespondiert zu der Abwesenheit einer Hardy-Ungleichung in zwei Dimensionen.

Im nächsten Lemma formulieren wir die optimale Bedingung auf  $\alpha$ , sodass  $\tilde{H}_k^\alpha$  nach unten beschränkt ist. Ein

**Lemma 3.5.13** (Lemma 21 in [49] und Lemma III.1 in [50]). *Sei  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$ . Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist der Operator  $\tilde{H}_k^\alpha$  symmetrisch. Außerdem ist  $\tilde{H}_k^\alpha$  genau dann nach unten in  $L^2(\mathbb{R})$  beschränkt, wenn*

$$\alpha \leq \alpha_k := \frac{1}{V_k(0)} = \frac{2\Gamma^2\left((k+2)/2\right)}{\Gamma^2\left((k+1)/2\right)} \quad (3.5.55)$$

*gilt.*

*Beweis.* Für  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$  und  $\psi \in \mathfrak{D}(\tilde{H}_k^\alpha) \subset \mathfrak{D}^1$  folgt aus Korollar 3.5.7 und Lemma 3.5.6

$$\begin{aligned} \langle \psi, \tilde{H}_k^\alpha \psi \rangle &= \langle \psi, R^1 \psi \rangle - \alpha \langle \psi, \Xi_{k+1/2} R^1 \Xi_{k+1/2}^{-1} \psi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \alpha V_k(\tau)) |(R^{1/2} \psi)(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.5.56)$$

Da die rechte Seite reell ist, folgt, dass  $\tilde{H}_k^\alpha$  ein symmetrischer Operator ist. Für  $\alpha \leq \alpha_k$  ist  $1 - \alpha V_k$  nach Lemma 3.5.8 (a) und (b) nichtnegativ und daher  $\tilde{H}_k^\alpha$  nach (3.5.56) nach unten beschränkt. Für  $\alpha > \alpha_k$  ist  $1 - \alpha V_k$  nach Lemma 3.5.8 (a) und (b) auf einer offenen Menge  $(-\rho, \rho)$  ( $\rho$  hängt von  $k$  und  $\alpha$  ab) negativ. Für  $l \in \mathbb{N}$  ist die Funktion

$$\psi_l := \tilde{\psi}_l / \|\tilde{\psi}_l\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{mit} \quad \tilde{\psi}_l(\tau) := e^{-l(\tau-i/2)^2} (1 - e^{-l^2(\tau-i)^2})$$

normiert in  $L^2(\mathbb{R})$  und liegt in  $\mathfrak{D}(\tilde{H}_k^\alpha)$ . Durch die Anwendung von Lemma 3.5.8 erhalten wir die Abschätzung

$$1 - \alpha V_k \leq (1 - \alpha V_k(\rho/2)) \mathbb{1}_{[-\rho/2, \rho/2]} + \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus (-\rho/2, \rho/2)}. \quad (3.5.57)$$

Es folgt aus (3.5.57), dass für  $l$  hinreichend groß (3.5.56) mit  $\psi := \psi_l$  negativ wird. Ersetzt man dann  $\psi_l(\tau)$  durch  $\lambda^{i\tau} \psi_l(\tau)$  (auch normiert und liegt in  $\mathfrak{D}(\tilde{H}_k^\alpha)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ), so kann man die quadratische Form (3.5.56) beliebig negativ machen.  $\square$

Nach Lemma 3.5.13 ist für  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$  und  $\alpha \leq \alpha_k$  die Friedrichs-Fortsetzung [33] von  $\tilde{H}_k^\alpha$  wohldefiniert. Den entsprechenden selbstadjungierten Operator bezeichnen wir mit  $H_k^\alpha$ . Die folgende Beschreibung des Definitionsbereiches von  $H_k^\alpha$  für  $k \neq -1/2$  folgt analog zu Korollar 2 in [45] (siehe Abschnitt 2.2.3 in [2]) mit der Hilfe von Lemma 3.5.8. Mit der gleichen Technik wurde auch die Selbstadjungiertheit des Brown-Ravenhall-Operators in [75] untersucht.

**Lemma 3.5.14** (Lemma 22 in [49] und Lemma III.3 in [50]). *Seien  $k \in (\mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)) \setminus \{-1/2\}$  und  $\alpha \leq \alpha_k$ .*

- (a) *Für  $\alpha < V_k^{-1}(i/2)$  ist der Operator  $\tilde{H}_k^\alpha$  selbstadjungiert, d. h.  $\tilde{H}_k^\alpha = H_k^\alpha$ .*
- (b) *Der Operator  $\tilde{H}_k^{V_k^{-1}(i/2)}$  ist wesentlich selbstadjungiert, d. h., die Relation  $(\tilde{H}_j^{V_k^{-1}(i/2)})^* = H_k^{V_k^{-1}(i/2)}$  gilt.*
- (c) *Für  $\alpha \in (V_k^{-1}(i/2), \alpha_k]$  ist die Friedrichs-Fortsetzung  $H_k^\alpha$  von  $\tilde{H}_k^\alpha$  die Einschränkung von*

$$(\tilde{H}_k^\alpha)^* = R^1(1 - \alpha V_k(\cdot - i/2)) \quad (3.5.58)$$

auf

$$\mathfrak{D}(H_k^\alpha) = \mathfrak{D}^1 \dot{+} \text{span} \{(\cdot - i/2 + i\zeta_{k,\alpha})^{-1}\},$$

wobei  $\zeta_{k,\alpha}$  die eindeutige Lösung von

$$1 - \alpha V_k(-i\zeta_{k,\alpha}) = 0 \quad (3.5.59)$$

in  $(-1/2, 0]$  ist.

Im Fall  $k = -1/2$  ist die Funktion  $V_{-1/2}(\cdot \pm i/2)$  nicht auf  $\mathbb{R}$  beschränkt. Daher ist in diesem Fall das Argument aus [45] nicht direkt anwendbar. Deshalb können wir nur das nachfolgende schwächere Resultat für  $H_{-1/2}^\alpha$  zeigen.

**Lemma 3.5.15** (Lemma 23 in [49]). *Für  $\alpha \in (0, \alpha_{-1/2}]$  erfüllt der Definitionsbereich der Friedrichs-Fortsetzung  $H_{-1/2}^\alpha$  von  $\tilde{H}_{-1/2}^\alpha$  die Relation*

$$\mathfrak{D}(H_{-1/2}^\alpha) \supseteq \mathfrak{D}(\tilde{H}_{-1/2}^\alpha) \dot{+} \text{span}\{\psi_{-1/2}^\alpha\}$$

mit

$$\psi_{-1/2}^\alpha(\tau) := \frac{\tau - i}{(\tau - 2i)(\tau - i/2 + i\zeta_{-1/2,\alpha})} \quad \text{für } \tau \in \mathbb{R}$$

und  $\zeta_{-1/2,\alpha}$  definiert wie in (3.5.59). Zusätzlich gilt

$$(H_{-1/2}^\alpha \psi_{-1/2}^\alpha)(\tau) = \frac{\tau(1 - \alpha V_{-1/2}(\tau + i/2))}{(\tau - i)(\tau + i/2 + i\zeta_{-1/2,\alpha})} \quad (3.5.60)$$

für alle  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

*Beweis.* Nach Satz 5.38 in [81] ist  $H_{-1/2}^\alpha$  die Einschränkung von  $(\tilde{H}_{-1/2}^\alpha)^*$  auf  $\mathfrak{D}(H_{-1/2}^\alpha) := \mathfrak{Q}_{-1/2}^\alpha \cap \mathfrak{D}((\tilde{H}_{-1/2}^\alpha)^*)$ , wobei  $\mathfrak{Q}_{-1/2}^\alpha$  der Abschluss von  $\mathfrak{D}(\tilde{H}_{-1/2}^\alpha)$  in der Norm der quadratischen Form  $\tilde{H}_{-1/2}^\alpha + 1$  ist.

Da  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \subset \mathfrak{D}(\tilde{H}^\alpha)$  dicht in  $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$  ist, zeigt die Darstellung (3.5.52), dass  $\mathfrak{D}(\tilde{H}_{-1/2}^\alpha)$  dicht in  $\mathfrak{D}^{1/2}$  bezüglich der Graphnorm von  $R^{1/2}$  für alle  $\alpha \in (0, \alpha_{-1/2}]$  ist. Lemma 3.5.13 impliziert die Ungleichungen

$$\langle v, R^1 v \rangle \geq \langle v, \tilde{H}_{-1/2}^\alpha v \rangle \geq (1 - \alpha/\alpha_{-1/2}) \langle v, R^1 v \rangle$$

für alle  $\alpha \in (0, \alpha_{-1/2}]$  und  $v \in \mathfrak{D}(\tilde{H}_{-1/2}^\alpha)$ . Daher gilt  $\mathfrak{Q}_{-1/2}^\alpha = \mathfrak{D}^{1/2} \subset \mathfrak{Q}_{-1/2}^{\alpha_{-1/2}}$  für  $\alpha \in (0, \alpha_{-1/2})$  und die rechte Seite von (3.5.56) stimmt mit dem Abschluss der quadratischen Form von  $\tilde{H}_{-1/2}^\alpha$  auf jedem  $v \in \mathfrak{D}^{1/2}$  für  $\alpha \in (0, \alpha_{-1/2}]$  überein.

Für  $l \in \mathbb{N}$  sei  $\psi_l(\tau) := (\tau - i)(\tau - 2i)^{-1}(\tau - i/2 - i/l)^{-1} \in \mathfrak{D}^{1/2} \subset \mathfrak{Q}_{-1/2}^{\alpha_{-1/2}}$ . Durch die Berechnung der rechten Seite von (3.5.56) mit  $v := \psi_l - \psi_m$  und  $m \leq l$  erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \alpha_{-1/2} V_{-1/2}) |R^{1/2}(\psi_l - \psi_m)|^2 d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \alpha_{-1/2} V_{-1/2}(\tau))}{\tau^2(m^2 \tau^2 + 1)} d\tau.$$

Nach Lemma 3.5.8 und monotoner Konvergenz schlussfolgern wir, dass  $(\psi_l)_{l \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathfrak{Q}_{-1/2}^{\alpha_{-1/2}}$  ist, welche gegen  $\psi_{-1/2}^{\alpha_{-1/2}}$  in  $L^2(\mathbb{R})$  konvergiert. Daher liegt  $\psi_{-1/2}^{\alpha_{-1/2}}$  in  $\mathfrak{Q}_{-1/2}^{\alpha_{-1/2}}$ .

Sei  $\alpha \in (0, \alpha_{-1/2}]$ . Unter der Verwendung der Relationen

$$\begin{aligned} \psi_{-1/2}^\alpha &\in \mathfrak{D}^{1/4}, \quad \Xi_0^{-1} \psi_{-1/2}^\alpha \in \mathfrak{D}^{1/4} \text{ und} \\ (1 - \alpha V_{-1/2}(\cdot - i/4)) \psi_{-1/2}^\alpha(\cdot + i/4) &\in \mathfrak{D}^{3/4} \end{aligned}$$

(siehe (3.5.59) und (3.5.26)) und Korollar 3.5.7 sowie Lemma 3.5.6 erhalten wir für jedes  $v \in \mathfrak{D}(\tilde{H}_{-1/2}^\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{-1/2}^\alpha, \tilde{H}_{-1/2}^\alpha v \rangle &= \left\langle \psi_{-1/2}^\alpha, (R^1 - \alpha \Xi_0 R^1 \Xi_0^{-1}) v \right\rangle \\ &= \langle R^{1/4} \psi_{-1/2}^\alpha, R^{3/4} v \rangle - \alpha \langle R^{1/4} \Xi_0^{-1} \psi_{-1/2}^\alpha, R^{3/4} \Xi_0^{-1} v \rangle \\ &= \left\langle (1 - \alpha V_{-1/2}(\cdot - i/4)) \psi_{-1/2}^\alpha(\cdot + i/4), R^{3/4} v \right\rangle \\ &= \left\langle (1 - \alpha V_{-1/2}(\cdot + i/2)) \psi_{-1/2}^\alpha(\cdot + i), v \right\rangle. \end{aligned}$$

Es folgt, dass  $\psi_{-1/2}^\alpha \in \mathfrak{D}((\tilde{H}_{-1/2}^\alpha)^*)$  und (3.5.60) für alle  $\alpha \in (0, \alpha_{-1/2}]$  gilt.  $\square$

Abschließend formulieren wir wesentliche Beobachtungen für die Funktionen (3.5.45), (3.5.46) und (3.5.47), d. h. für die Darstellung der Funktionen (3.5.31) im Fourier-Mellin-Raum (siehe Lemma 3.5.12).

**Lemma 3.5.16** (Lemma 24 in [49] und Lemma III.4 in [50]). *Sei  $\Upsilon \in [0, 1/2]$ .*

- (a) *Für  $k \in \{-1, -1/2, 1/2, 1\}$  liegen die Funktionen  $\xi_k^\Upsilon$  und  $\eta_k^\Upsilon$  in  $\mathfrak{D}^1$ .*
- (b) *Die Funktionen  $\Xi_0^{-1}\xi_{1/2}^\Upsilon$  und  $\Xi_0^{-1}\eta_{-1/2}^\Upsilon$  sind Element von  $\mathfrak{D}^1$ .*
- (c) *Für  $k \in \{-1/2, 1/2\}$  gelten  $\chi_k^\Upsilon \in \mathfrak{D}(H_{-1/2}^{(V_{-1/2}(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1}}) \cap \mathfrak{D}(H_{1/2}^{(V_{1/2}(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1}})$  und*

$$H_{-1/2}^{(V_{-1/2}(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1}} \chi_k^\Upsilon = \left(1 - (V_{-1/2}(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1} V_{-1/2}(\cdot + \mathrm{i}/2)\right) \chi_k^\Upsilon(\cdot + \mathrm{i}). \quad (3.5.61)$$

- (d) *Für  $k \in \{-1, 1\}$  gilt  $\chi_k^\Upsilon \in \mathfrak{D}(H_0^{(V_0(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1}}) \cap \mathfrak{D}(H_1^{(V_1(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1}})$ .*

*Beweis.* Zu (a): Aus der Kombination von Hinweis 3.5.5 und der Tatsache, dass die Gammafunktion in  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$  mit einer einfachen Polstelle in null analytisch ist, folgt, dass  $\xi_k^\Upsilon$  und  $\eta_k^\Upsilon$  analytisch in einer komplexen Umgebung von  $\mathfrak{S}^1$  sind. Daher gilt für alle  $\rho > 0$ , dass die Funktionen  $\xi_k^\Upsilon$  und  $\eta_k^\Upsilon$  in  $\mathfrak{A}^\rho := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [-\rho, \rho], \operatorname{Im} z \in [0, 1]\}$  beschränkt sind. Für  $\rho$  hinreichend groß impliziert dies zusammen mit der Verwendung der Asymptotik (3.5.25) auf  $\mathfrak{S}^1 \setminus \mathfrak{A}^\rho$  in den Ausdrücken (3.5.46), (3.5.47) und (3.5.20) (oder (3.5.22) und (3.5.26)) die Eigenschaften (a)–(c) von Definition 3.5.2 für  $\xi_k^\Upsilon$  und  $\eta_k^\Upsilon$ .

Zu (b): Die Funktionen  $\Xi_0^{-1}\xi_{1/2}^\Upsilon$  und  $\Xi_0^{-1}\eta_{-1/2}^\Upsilon$  sind analytisch in einer komplexen Umgebung von  $\mathfrak{S}^1$ . Daher liefert unter der Berücksichtigung von (3.5.26) die Argumentation von Beweis (a) die Behauptung.

(c): Nach Lemma 3.5.15 und Lemma 3.5.14 genügt es zu zeigen, dass

$$\chi_k^\Upsilon + \mathrm{i}\sqrt{k^2 - \Upsilon^2} \frac{2\Upsilon - 3}{2\Upsilon - 1} \Xi_{k-1/2}(\mathrm{i}(\Upsilon + 1/2)) \psi_{-1/2}^{(V_{-1/2}(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1}} \in \mathfrak{D}\left(\tilde{H}_{-1/2}^{(V_{-1/2}(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1}}\right) \quad (3.5.62)$$

und

$$\chi_k^\Upsilon + \frac{\mathrm{i}\sqrt{k^2 - \Upsilon^2} \Xi_{k-1/2}(\mathrm{i}(\Upsilon + 1/2))}{(\cdot - \mathrm{i}/2 + \mathrm{i}\zeta_{1/2, (V_{1/2}(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1}})} \in \mathfrak{D}\left(\tilde{H}_{1/2}^{(V_{1/2}(\mathrm{i}\Upsilon))^{-1}}\right) \quad (3.5.63)$$



gelten. Wegen (3.5.54) und  $\zeta_{-1/2, (V_{-1/2}(i\Upsilon))^{-1}} = -\Upsilon$  sowie  $\zeta_{1/2, (V_{1/2}(i\Upsilon))^{-1}} = -\Upsilon$  (siehe (3.5.59)) kann dies analog zu (a) getan werden. Die Formel (3.5.61) folgt dann aus (3.5.62), (3.5.52) und (3.5.60).

Zu (d): Nach Lemma 3.5.14 genügt es zu zeigen, dass für  $l \in \{0, 1\}$  gilt

$$\chi_k^\Upsilon + \frac{i\sqrt{k^2 - \Upsilon^2} \Xi_{|k|-k/(2|k|)}(i(\Upsilon + 1/2))}{(\cdot - i/2 + i\zeta_{l, (V_l(i\Upsilon))^{-1}})} \in \mathfrak{D}\left(\tilde{H}_l^{(V_l(i\Upsilon))^{-1}}\right). \quad (3.5.64)$$

Dies kann analog zu (c) getan werden.  $\square$

### 3.5.3 Kritische untere Schranken

Für  $\gamma \in \mathbb{R}$  definieren wir die quadratische Form

$$\mathbf{p}^\gamma[f] := \int_{\mathbb{R}_+} p^\gamma |f(p)|^2 dp$$

auf  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, (1 + p^\gamma)dp)$ . Außerdem verwenden wir für  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$  die Definition von  $\mathbf{q}_k$ , welche in (3.2.7) formuliert wurde.

Der nächste Satz impliziert eine untere Schranke für die quadratische Form des kritischen Operators  $H_k^{\alpha_k}$ .

**Satz 3.5.17** (Verallgemeinerung von Satz 30 in [49]). *Für jedes  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$  und  $\lambda \in (0, 1)$  gibt es ein  $K_{k,\lambda} > 0$ , sodass für alle  $l > 0$  die Ungleichung*

$$\mathbf{p}^1 - \alpha_k \mathbf{q}_k \geq K_{k,\lambda} l^{\lambda-1} \mathbf{p}^\lambda - l^{-1} \mathbf{p}^0 \quad (3.5.65)$$

auf  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, (1 + p)dp)$  gilt.

*Beweis.* Seien  $\lambda \in (3/4, 1)$  und  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, (1 + p)dp)$ . Aus der Nichtnegativität von  $Q_k$ , der Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz-Ungleichung und der Tatsache, dass

$$(q + l^{\lambda-1} q^\lambda)^{-1} \leq q^{-1} - l^{\lambda-1} q^{\lambda-2} + l^{2(\lambda-1)} q^{2\lambda-3} \quad \text{für alle } q, l > 0 \text{ gilt,}$$

(Diese Relation folgt aus  $(1 + z)^{-1} \leq 1 - z + z^2$  für alle  $z \geq 0$  durch die Substitution  $z := (lq)^{\lambda-1}$ .) schlussfolgern wir

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k[f] &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{f(p)} f(q) Q_k \left( \frac{1}{2} \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \right) dq dp \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty |f(p)|^2 Q_k \left( \frac{1}{2} \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \right) \left( \frac{p + l^{\lambda-1} p^\lambda}{q + l^{\lambda-1} q^\lambda} \right) dq dp \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty |f(p)|^2 Q_k \left( \frac{1}{2} \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \right) \\ &\quad \times (p + l^{\lambda-1} p^\lambda) (q^{-1} - l^{\lambda-1} q^{\lambda-2} + l^{2(\lambda-1)} q^{2\lambda-3}) dq dp. \end{aligned} \quad (3.5.66)$$

Mit der Hilfe von (3.2.6) kann man einfach

$$Q_k((x + x^{-1})/2) \sim \frac{\pi^{1/2}\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2)} \begin{cases} x^{-k-1} & \text{für } x \rightarrow +\infty, \\ x^{k+1} & \text{für } x \rightarrow +0, \end{cases} \quad (3.5.67)$$

nachrechnen. Sei nun  $g \in \mathfrak{D}(R^{-1/2})$ . Außerdem gibt es ein  $d \in \{2, 3\}$  und  $j \in \mathfrak{T}_d$  mit

$$|\varkappa_j - 1/2| - 1/2 = k.$$

Wir definieren

$$G = \mathcal{W}_d^* \bigoplus_{j' \in \mathfrak{T}_d} \delta_{j', j} \begin{pmatrix} R^{-1/2}g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Lemma 3.5.11 sowie Lemma 3.5.6 und Korollar 3.5.7 folgt

$$\langle g, V_k g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|\mathbf{x}|} |G(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.5.68)$$

Nach (3.5.35), (3.2.5) und Lemma 3.2.2 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|\mathbf{x}|} |G(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|\mathbf{x}|} |\mathcal{F}_d^* \mathcal{Q}_d^* \bigoplus_{j' \in \mathfrak{T}_d} \delta_{j', j} \mathcal{M}^* R^{-1/2} g|^2 d\mathbf{x} = \mathfrak{q}_k[\mathcal{M}^* R^{-1/2} g]. \quad (3.5.69)$$

Die rechte Seite in (3.5.69) kann mit (3.5.19) und (1.5.20) in [2] zu

$$\begin{aligned} & \mathfrak{q}_k[(\cdot)^{-1/2} \mathcal{M}^* g] \\ &= \int_0^\infty \overline{(\mathcal{M}^* g)(p)} \sqrt{2/\pi} \left( (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \left( Q_k \left( \frac{1}{2} \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \right) \sqrt{\frac{q}{p}} \right) (\mathcal{M}^* g)(q) \frac{dq}{q} \right) dp \\ &= \left\langle g, \sqrt{2/\pi} \mathcal{M} \left( Q_k \left( ((\cdot) + (\cdot)^{-1})/2 \right) (\cdot)^{-1/2} \right) g \right\rangle \end{aligned}$$

umgeformt werden. Dies zusammen mit (3.5.68), der Dichtheit von  $\mathfrak{D}(R^{-1/2})$  in  $L^2(\mathbb{R})$  und (3.5.67) impliziert, dass

$$\begin{aligned} V_k(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Q_k((x + x^{-1})/2) x^{-iz-1} dx \\ &= \frac{p^{iz}}{\pi} \int_0^\infty Q_k \left( \frac{1}{2} \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \right) q^{-iz-1} dq \end{aligned}$$

im Streifen  $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in (-k-1, k+1)\right\}$  gilt.

Nun können wir die rechte Seite von (3.5.66) umformulieren und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k[f] &\leq V_k(0)\mathbf{p}^1[f] + \left(V_k(0) - V_k(i(\lambda-1))\right)l^{\lambda-1}\mathbf{p}^\lambda[f] \\ &\quad + \left(V_k(2i(\lambda-1)) - V_k(i(\lambda-1))\right)l^{2(\lambda-1)}\mathbf{p}^{2\lambda-1}[f] \\ &\quad + V_k(2i(\lambda-1))l^{3(\lambda-1)}\mathbf{p}^{3\lambda-2}[f]. \end{aligned} \quad (3.5.70)$$

Die Lemmata 3.5.13 und 3.5.8 implizieren

$$\begin{aligned} V_k(0) &= \alpha_k^{-1}, \\ V_k(0) - V_k(i(\lambda-1)) &< 0, \\ V_k(2i(\lambda-1)) - V_k(i(\lambda-1)) &\geq 0, \\ V_k(2i(\lambda-1)) &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.5.71)$$

Für jedes  $\lambda \in (3/4, 1)$  und  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  existieren  $C_1, C_2 > 0$ , sodass die Ungleichungen

$$l^{2(\lambda-1)}p^{2\lambda-1} \leq \varepsilon_1 p^\lambda l^{\lambda-1} + C_1 l^{-1}, \quad l^{3(\lambda-1)}p^{3\lambda-2} \leq \varepsilon_2 p^\lambda l^{\lambda-1} + C_2 l^{-1} \quad (3.5.72)$$

für alle  $p, l > 0$  gelten. Für  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  hinreichend klein erhalten wir durch das Einsetzen von (3.5.72) in (3.5.70) und die Verwendung von (3.5.71) die Ungleichung

$$\mathbf{q}_k[f] \leq \mathbf{p}^1[f]/\alpha_k - C_1(k, \lambda)l^{\lambda-1}\mathbf{p}^\lambda[f] + C_2(k, \lambda)l^{-1}\mathbf{p}^0[f] \quad (3.5.73)$$

mit  $C_1(k, \lambda), C_2(k, \lambda) > 0$  für  $\lambda \in (3/4, 1)$ . Für  $\lambda \in (0, 3/4]$ ,  $\lambda' \in (3/4, 1)$  gibt es eine Konstante  $C_3(\lambda, \lambda') > 0$ , sodass

$$l^{\lambda'}\mathbf{p}^{\lambda'} \geq -C_3(\lambda, \lambda')\mathbf{p}^0 + l^\lambda\mathbf{p}^\lambda$$

gilt. Damit können wir die Ungleichung (3.5.73) für  $\lambda$  aus der Ungleichung (3.5.73) für  $\lambda'$  schlussfolgern. Nun verwenden wir  $\alpha_j > 0$ , skalieren mit  $l$  durch und erhalten schließlich (3.5.65).  $\square$

**Korollar 3.5.18** (Verallgemeinerung von Korollar 31 in [49]). *Seien  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$  und  $\lambda \in (0, 1)$ . Für alle  $l > 0$  mit  $K_{k,\lambda}$  wie in (3.5.65) gilt die Ungleichung*

$$H_k^{\alpha_k} \geq K_{k,\lambda}l^{\lambda-1}R^\lambda - l^{-1}. \quad (3.5.74)$$

*Beweis.* Für jedes  $\psi \in \mathfrak{D}(\tilde{H}_k^{\alpha_k})$  gilt

$$\langle \psi, \tilde{H}_k^{\alpha_k} \psi \rangle = \langle \psi, R^1 \psi \rangle - \alpha_k \langle \psi, V_k(\cdot + i/2)R^1 \psi \rangle. \quad (3.5.75)$$

Nach (3.5.19) stimmt der erste Term auf der rechten Seite von (3.5.75) mit  $\mathbf{p}^1[\mathcal{M}^*\psi]$  überein. Aus der Kombination von (3.5.68), (3.5.69) und Korollar 3.5.7 erhalten wir

$$\langle \psi, V_k(\cdot + i/2)R^1\psi \rangle = \mathbf{q}_k[\mathcal{M}^*\psi].$$

Daher gilt

$$\langle \psi, \tilde{H}_k^{\alpha_k}\psi \rangle = \mathbf{p}^1[\mathcal{M}^*\psi] - \alpha_k \mathbf{q}_k[\mathcal{M}^*\psi].$$

Durch die Anwendung von Satz 3.5.17, (3.5.19) und der Tatsache, dass  $H_k^{\alpha_k}$  die Friedrichs-Fortsetzung von  $\tilde{H}_k^{\alpha_k}$  ist, schlussfolgern wir (3.5.74).  $\square$

### 3.5.4 Abschätzungen in den kritischen Kanälen

Für  $k \in \{-1, -1/2, 1/2, 1\}$  und  $\nu \in [0, |k|]$  führen wir auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  die  $(2 \times 2)$ -matrixwertige Funktion

$$M_k^\nu(\tau) := \begin{pmatrix} -\nu V_{|k-1/2|-1/2}(\tau + i/2) & 1 \\ 1 & -\nu V_{|k+1/2|-1/2}(\tau + i/2) \end{pmatrix} \quad (3.5.76)$$

ein.

**Lemma 3.5.19** (Lemma 25 in [49] und Lemma IV.1 in [50]).

(a) Seien  $\Upsilon \in [0, 1/2)$  und  $k \in \{-1, -1/2, 1/2, 1\}$ . Für jedes  $\Psi \in \mathfrak{C}^{\sqrt{k^2-\Upsilon^2}, k}$  gibt es eine Zerlegung

$$\mathcal{U}_k \Psi = \begin{pmatrix} \zeta \\ v \end{pmatrix} + a \chi_k^\Upsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{k^2 - \Upsilon^2} V_{|k-1/2|-1/2}(i\Upsilon) \end{pmatrix} \quad (3.5.77)$$

mit  $\zeta \in \mathfrak{D}\left(\tilde{H}_{|k-1/2|-1/2}^{(V_{|k-1/2|-1/2}(i\Upsilon))^{-1}}\right)$ ,  $v \in \mathfrak{D}\left(\tilde{H}_{|k+1/2|-1/2}^{(V_{|k+1/2|-1/2}(i\Upsilon))^{-1}}\right)$  und  $a \in \mathbb{C}$ . Außerdem gilt die Darstellung

$$\mathcal{U}_k D^{\sqrt{k^2-\Upsilon^2}, k} \Psi = M_k^{\sqrt{k^2-\Upsilon^2}} \begin{pmatrix} R^1 \zeta + a \chi_k^\Upsilon(\cdot + i) \\ R^1 v + a \sqrt{k^2 - \Upsilon^2} V_{|k-1/2|-1/2}(i\Upsilon) \chi_k^\Upsilon(\cdot + i) \end{pmatrix}. \quad (3.5.78)$$

(b) Seien  $\Upsilon \in [1/2, 1]$  und  $k \in \{-1, 1\}$ . Für jedes  $\Psi \in \mathfrak{C}^{\sqrt{k^2-\Upsilon^2}, k}$  gilt

$$\mathcal{U}_k \Psi = \begin{pmatrix} \zeta \\ v \end{pmatrix} \quad (3.5.79)$$

mit  $\zeta \in \mathfrak{D}\left(\tilde{H}_{(1-k)/2}^{(V_{(1-k)/2}(i\Upsilon))^{-1}}\right)$ ,  $v \in \mathfrak{D}\left(\tilde{H}_{(k+1)/2}^{(V_{(k+1)/2}(i\Upsilon))^{-1}}\right)$  und

$$\mathcal{U}_k D^{\sqrt{1-\Upsilon^2}, k} \Psi = M_k^{\sqrt{1-\Upsilon^2}} \begin{pmatrix} R^1 \zeta \\ R^1 v \end{pmatrix}. \quad (3.5.80)$$

*Beweis.* Zum Beweis von Teil (a): Die Zerlegung (3.5.77) folgt aus (3.5.32), Lemma 3.5.12, (3.5.54) und Lemma 3.5.16.

Sei  $(\chi, \varsigma) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  beliebig. Wir definieren  $d := 1 + 2|k|$  und wählen  $j \in \mathfrak{T}_d$  so, dass  $\varkappa_j = k$  gilt. Nach (3.5.44) und (3.5.33) gilt

$$\mathcal{U}_k D^{\sqrt{k^2 - \Upsilon^2}, k} \begin{pmatrix} \chi \\ \varsigma \end{pmatrix} = \left( \mathcal{W}_d \mathbf{D}_d^{\sqrt{k^2 - \Upsilon^2}} \mathcal{W}_d^* \mathcal{W}_d (\mathcal{A}_d \mathcal{S}_d)^* \bigoplus_{j' \in \mathfrak{T}_d} \delta_{j', j} \begin{pmatrix} \chi \\ \varsigma \end{pmatrix} \right)_j. \quad (3.5.81)$$

Aus den Lemmata 3.5.10 und 3.5.11 folgt, dass die rechte Seite in (3.5.81) gleich

$$\begin{pmatrix} \Xi_{\mu_-(\varkappa_j)} R^1 \Xi_{\mu_-(\varkappa_j)}^{-1} & R^1 \\ R^1 & \Xi_{\mu_+(\varkappa_j)} R^1 \Xi_{\mu_+(\varkappa_j)}^{-1} \end{pmatrix} \left( \mathcal{W}_d (\mathcal{A}_d \mathcal{S}_d)^* \bigoplus_{j' \in \mathfrak{T}_d} \delta_{j', j} \begin{pmatrix} \chi \\ \varsigma \end{pmatrix} \right)_j \quad (3.5.82)$$

ist, wobei die Notation (3.5.41) verwendet wurde. Aus

$$\left\langle D^{\sqrt{k^2 - \Upsilon^2}, k} \Psi, \begin{pmatrix} \chi \\ \varsigma \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \mathcal{U}_k \Psi, \mathcal{U}_k D^{\sqrt{k^2 - \Upsilon^2}, k} \begin{pmatrix} \chi \\ \varsigma \end{pmatrix} \right\rangle \quad (3.5.83)$$

und (3.5.81), (3.5.82), (3.5.44), (3.5.77) schlussfolgern wir, dass die rechte Seite in (3.5.83) gleich

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} \zeta \\ v \end{pmatrix} + a \chi_k^\Upsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{k^2 - \Upsilon^2} V_{|k-1/2|-1/2}(i\Upsilon) \end{pmatrix}, \right. \\ & \quad \left. \begin{pmatrix} \Xi_{\mu_-(k)} R^1 \Xi_{\mu_-(k)}^{-1} & R^1 \\ R^1 & \Xi_{\mu_+(k)} R^1 \Xi_{\mu_+(k)}^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{U}_k \begin{pmatrix} \chi \\ \varsigma \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.5.84)$$

ist. Der Ausdruck (3.5.84) entspricht wiederum

$$\begin{aligned} & \left\langle M_k^{\sqrt{k^2 - \Upsilon^2}} R^1 \begin{pmatrix} \zeta \\ v \end{pmatrix}, \mathcal{U}_k \begin{pmatrix} \chi \\ \varsigma \end{pmatrix} \right\rangle + a \left\langle \chi_k^\Upsilon \begin{pmatrix} \sqrt{k^2 - \Upsilon^2} V_{|k-1/2|-1/2}(i\Upsilon) \\ 1 \end{pmatrix}, \right. \\ & \quad \left. \begin{pmatrix} H_{|k-1/2|-1/2}^{(V_{|k-1/2|-1/2}(i\Upsilon))^{-1}} & 0 \\ 0 & H_{|k+1/2|-1/2}^{(V_{|k+1/2|-1/2}(i\Upsilon))^{-1}} \end{pmatrix} \mathcal{U}_k \begin{pmatrix} \chi \\ \varsigma \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.5.85)$$

nach Lemma 3.5.14, Lemma 3.5.15, (3.5.54) und Korollar 3.5.7. Der Ausdruck (3.5.85) ist nach (3.5.61) und Lemma 3.5.14 gleich

$$\left\langle \mathcal{U}_k^* M_k^{\sqrt{k^2 - \Upsilon^2}} \begin{pmatrix} R^1 \zeta + a \chi_k^\Upsilon(\cdot + i) \\ R^1 v + a \sqrt{k^2 - \Upsilon^2} V_{|k-1/2|-1/2}(i\Upsilon) \chi_k^\Upsilon(\cdot + i) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi \\ \varsigma \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (3.5.86)$$

Da nach obiger Argumentation (3.5.86) und die linke Seite von (3.5.83) gleich sind, folgt aus der Dichtheit von  $C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  in  $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  die Relation (3.5.78).

Der Beweis der Behauptung (b) kann durch die Verwendung der Argumentation aus (a) in Kombination mit der Erkenntnis  $\mathfrak{C}^{\sqrt{k^2 - \Upsilon^2}, k} = C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  geführt werden. Im Wesentlichen bedeutet dies, dass alle Terme, welche mit dem Parameter  $a$  multipliziert werden, entfallen.  $\square$

Für  $k \in \{-1/2, 1/2, 1\}$  und  $\nu \in (0, |k|]$  definieren wir die Funktion

$$K_k^\nu(\tau) := \left| 1 - (V_{1/2-|k-1/2|}(i\sqrt{k^2 - \nu^2}))^{-1} V_{1/2-|k-1/2|}(\tau + i/2) \right|^2 \quad (3.5.87)$$

auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Lemma 3.5.20** (Lemma 26 in [49] und Lemma IV.3 in [50]). *Seien  $k \in \{-1, -1/2, 1/2, 1\}$  und  $\nu \in (0, |k|]$ . Dann gibt es eine Konstante  $\eta_{1+2|k|}^\nu > 0$ , sodass*

$$(M_k^\nu)^* M_k^\nu \geq (\eta_{1+2|k|}^\nu)^2 \text{diag}(K_{(-k)^{2|k|}}^\nu, K_{(k)^{2|k|}}^\nu) \quad (3.5.88)$$

punktweise auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt.

*Beweis.* Weil die Relation  $M_{-k}^\nu = \sigma_1 M_k^\nu \sigma_1$  gilt, genügt es die Ungleichung (3.5.88) für  $k = 1/2$  und  $k = 1$  zu zeigen. Dazu führen wir eine Fallunterscheidung durch. Zunächst betrachten wir den Fall  $k = 1/2$ . Außerdem führen wir die Kurzschreibweise  $V := V_{1/2}(i\sqrt{1/4 - \nu^2}) = \nu^{-2}(V_{-1/2}(i\sqrt{1/4 - \nu^2}))^{-1}$  ein (siehe (3.5.30) für die zweite Gleichheit). Für jedes  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt die Ungleichung

$$K_{\pm 1/2}^\nu(\tau) \leq 2 \left( 1 + (V_{\pm 1/2}(i\sqrt{1/4 - \nu^2}))^{-2} |V_{\pm 1/2}(\tau + i/2)|^2 \right).$$

Daraus folgt durch die Anwendung von (3.5.29)

$$K_{1/2}^\nu(\tau) \leq 2(1 + (1 + \tau^2)^{-1} V^{-2})$$

und

$$K_{-1/2}^\nu(\tau) \leq 2(1 + \nu^4 V^2 \tau^{-2}).$$

Analog erhalten wir

$$(M_{1/2}^\nu(\tau))^* M_{1/2}^\nu(\tau) = \begin{pmatrix} 1 + \nu^2 \tau^{-2} & -\frac{\nu(1 - 2i\tau)}{\tau^2 + i\tau} P_{1/2}(\tau) \\ -\frac{\nu(1 + 2i\tau)}{\tau^2 - i\tau} \bar{P}_{1/2}(\tau) & 1 + \nu^2(1 + \tau^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

mit

$$P_{1/2}(\tau) := \frac{\Gamma((1+i\tau)/2)\Gamma(-i\tau/2)}{\Gamma((1-i\tau)/2)\Gamma(i\tau/2)}, \quad |P_{1/2}(\tau)| = 1.$$

Daher gilt für alle  $\eta \in \mathbb{R}$  die Ungleichung

$$\det \left( (M_{1/2}^\nu(\tau))^* M_{1/2}^\nu(\tau) - \frac{\eta^2}{4} \operatorname{diag} (K_{-1/2}^\nu(\tau), K_{1/2}^\nu(\tau)) \right) \geq \frac{\mathcal{A}\tau^4 + \mathcal{B}\tau^2 + \mathcal{C}}{\tau^2(1+\tau^2)V^2} \quad (3.5.89)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= V^2(1 - \eta^2)^2, \\ \mathcal{B} &:= V^2(1 - 2\nu^2) - (1 + 2V^2 + 2\nu^2V^2 + \nu^4V^4)\eta^2 + (1 + V^2 + \nu^4V^4)\eta^4, \\ \mathcal{C} &:= \nu^4V^2 - \nu^2(1 + V^2 + \nu^2V^4 + \nu^4V^4)\eta^2 + \nu^4V^2(1 + V^2)\eta^4. \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass es ein  $\eta_2^\nu > 0$  gibt, sodass für alle  $\eta \in [0, 2\eta_2^\nu]$  die Koeffizienten  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  strikt positiv sind und deshalb auch die rechte Seite von (3.5.89). Da für  $\eta = 0$  beide Eigenwerte von  $(M_{1/2}^\nu(\tau))^* M_{1/2}^\nu(\tau)$  positiv sind, müssen beide Eigenwerte von

$$(M_{1/2}^\nu(\tau))^* M_{1/2}^\nu(\tau) - \eta^2 \operatorname{diag} (K_{-1/2}^\nu(\tau), K_{1/2}^\nu(\tau))$$

für alle  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\eta \in [0, \eta_2^\nu]$  nichtnegativ sein.

Für den verbleibenden Fall  $k = 1$  zeigen wir, dass der maximale Wert von  $\eta_3^\nu$ , sodass (3.5.88) gilt, in (2.3.3) gegeben ist. Aufgrund des hohen technischen Aufwandes wird diese Behauptung nicht an dieser Stelle bewiesen, sondern im Zusammenhang mit Satz 2.3.2.  $\square$

**Hinweis 3.5.21.** Seien  $\nu \in (0, 1/2]$  und  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Wir definieren  $\eta_{2,-}^\nu(\tau)$  als das Kleinere der beiden  $\eta \in (0, \infty)$  mit

$$\det \left( (M_{1/2}^\nu(\tau))^* M_{1/2}^\nu(\tau) - \eta^2 \operatorname{diag} (K_{-1/2}^\nu(\tau), K_{1/2}^\nu(\tau)) \right) = 0. \quad (3.5.90)$$

Es ist einfach zu sehen, dass

$$\eta_2^\nu = \inf_{\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \eta_{2,-}^\nu(\tau) \quad (3.5.91)$$

ist. Eine numerische Untersuchung von (3.5.91) deutet an, dass  $\eta_2^\nu$  gleich  $\lim_{\tau \searrow 0} \eta_{2,-}^\nu(\tau)$  ist. Daher wird vermutet, dass der maximale Wert von  $\eta_2^\nu$ , sodass

(3.5.88) gilt, gleich

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\nu^2 + 1}{(1 - V_{1/2}(\mathfrak{i}\Upsilon)^{-1})^2} + \nu^2 V_{-1/2}(\mathfrak{i}\Upsilon)^2 \right. \\ \left. - \sqrt{\left( \frac{\nu^2 + 1}{(1 - V_{1/2}(\mathfrak{i}\Upsilon)^{-1})^2} + \nu^2 V_{-1/2}(\mathfrak{i}\Upsilon)^2 \right)^2 - \frac{4\nu^4 V_{-1/2}(\mathfrak{i}\Upsilon)^2}{(1 - V_{1/2}(\mathfrak{i}\Upsilon)^{-1})^2}} \right)$$

ist, wobei  $\sqrt{1/4 - \nu^2}$  durch  $\Upsilon$  abgekürzt wurde. Diese Vermutung wird in dieser Arbeit nicht bewiesen.

Das abschließende Resultat des Abschnitts ist:

**Lemma 3.5.22** (Lemma 28 in [49] und Lemma IV.4 in [50]). *Seien  $k \in \{-1, -1/2, 1/2, 1\}$  und  $\nu \in (0, |k|]$ . Die Ungleichung*

$$(D^{\nu,k})^2 \geq (\eta_{1+2|k|}^\nu)^2 (\mathcal{U}_k^* \text{diag}(H_{\substack{(k)^{2|k|}-1/2|-1/2 \\ (k)^{2|k|}-1/2|-1/2}}^{(V_{|k|^{2|k|}-1/2|-1/2}(\sqrt{k^2-\nu^2}))^{-1}} \\ H_{\substack{1/2-|(k)^{2|k|}-1/2| \\ 1/2-|(k)^{2|k|}-1/2|}}^{(V_{1/2-|(k)^{2|k|}-1/2|}(\sqrt{k^2-\nu^2}))^{-1}}) \mathcal{U}_k)^2 \quad (3.5.92)$$

gilt mit dem  $\eta_{1+2|k|}^\nu$ , welches in Lemma 3.5.20 eingeführt wurde.

*Beweis.* Sei  $\Psi \in \mathfrak{E}^{\nu,k}$ .

Zunächst betrachten wir den Fall  $\Upsilon^2 := k^2 - \nu^2 < 1/4$ . Dann benutzen wir (3.5.77) um  $\mathcal{U}_k \Psi$  darzustellen. Durch die Anwendung von (3.5.78), Lemma 3.5.20 sowie der Lemmata 3.5.14 und 3.5.15 zusammen mit der Relation (3.5.61) erhalten wir

$$(\eta_{1+2|k|}^\nu)^{-2} \|D^{\nu,k} \Psi\|^2 = (\eta_{1+2|k|}^\nu)^{-2} \left\| M_k^\nu \begin{pmatrix} R^1 \zeta + a \chi_k^\Upsilon(\cdot + \mathfrak{i}) \\ R^1 v + a \nu V_{|k-1/2|-1/2}(\mathfrak{i}\Upsilon) \chi_k^\Upsilon(\cdot + \mathfrak{i}) \end{pmatrix} \right\|^2 \\ \geq \left\| \begin{pmatrix} \left( 1 - \frac{V_{1/2-|(-k)^{2|k|}-1/2|}(\cdot + \mathfrak{i}/2)}{V_{1/2-|(-k)^{2|k|}-1/2|}(\mathfrak{i}\Upsilon)} \right) (R^1 \zeta + a \chi_k^\Upsilon(\cdot + \mathfrak{i})) \\ \left( 1 - \frac{V_{1/2-|(k)^{2|k|}-1/2|}(\cdot + \mathfrak{i}/2)}{V_{1/2-|(k)^{2|k|}-1/2|}(\mathfrak{i}\Upsilon)} \right) (R^1 v + a \nu V_{|k-1/2|-1/2}(\mathfrak{i}\Upsilon) \chi_k^\Upsilon(\cdot + \mathfrak{i})) \end{pmatrix} \right\|^2 \\ = \left\| \mathcal{U}_k^* \text{diag}(H_{\substack{(k)^{2|k|}-1/2|-1/2 \\ (k)^{2|k|}-1/2|-1/2}}^{(V_{|k|^{2|k|}-1/2|-1/2}(\mathfrak{i}\Upsilon))^{-1}}, H_{\substack{1/2-|(k)^{2|k|}-1/2| \\ 1/2-|(k)^{2|k|}-1/2|}}^{(V_{1/2-|(k)^{2|k|}-1/2|}(\mathfrak{i}\Upsilon))^{-1}}) \mathcal{U}_k \Psi \right\|^2.$$

Da  $\mathfrak{E}^{\nu,k}$  ein determinierender Bereich für  $D^{\nu,k}$  ist, schlussfolgern wir (3.5.92). Den Fall  $k^2 - \nu^2 \geq 1/4$  kann man analog beweisen, indem man (3.5.79) und (3.5.80) anstelle von (3.5.77) und (3.5.78) verwendet.  $\square$



### 3.5.5 Abschätzungen in den nicht kritischen Kanälen

Weil wir zum Beweis von Satz 2.6.4 eine ähnliche Ungleichung verwenden wollen, beweisen wir zunächst ein Lemma, welches eine viel allgemeinere Situation abdeckt, als für die Lösung unserer Problemstellung nötig wäre. Aus diesem Resultat schlussfolgern wir anschließend die zum Beweis der Sätze 2.3.1 und 2.3.4 benötigten Ungleichungen.

**Lemma 3.5.23** (Verallgemeinerung von Lemma 5.1 in [52]). *Sei  $\nu \in \mathbb{R}$ . Für alle*

$$k \in (\mathbb{Z} + (n-1)/2) \setminus \{0\} \text{ mit} \quad (3.5.93)$$

$$|k| \geq k_n^\nu := \min\{k \in \mathbb{N}_0 + (n-1)/2 : k^2 > \nu^2 + 1/4\}$$

*gilt die Abschätzung*

$$(D^{\nu,k})^2 \geq K_n^\nu (D^{0,k})^2 \quad (3.5.94)$$

*mit*

$$K_n^\nu := 1 - \frac{\nu((k_n^\nu)^2 + 1/4)}{((k_n^\nu)^2 - 1/4)^2} \left( \sqrt{\nu^2 + \frac{(4(k_n^\nu)^2 - \nu^2)((k_n^\nu)^2 - 1/4)^2}{((k_n^\nu)^2 + 1/4)^2}} - \nu \right) > 0.$$

*Beweis.* Wie in Lemma 3.5.22 genügt es (3.5.94) für Funktionen aus  $\mathfrak{C}^{\nu,k}$  zu zeigen. Nach (3.4.5) können wir  $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  annehmen.

Für  $b \in \mathbb{R}$  definieren wir eine Familie der Matrixfunktionen

$$A_k^\nu(b, \tau) := \begin{pmatrix} \nu^2 + b(\tau^2 + (1/2 - k)^2) & 2\nu(i\tau + k) \\ 2\nu(-i\tau + k) & \nu^2 + b(\tau^2 + (k + 1/2)^2) \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Eine Rechnung, welche (2.6.1) und (3.5.18) verwendet, liefert

$$\|D^{\nu,k}\psi\|^2 = \|\mathcal{M}D^{\nu,k}\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \langle (R^{-1}\mathcal{M}\psi)(\tau), A_k^\nu(1, \tau)(R^{-1}\mathcal{M}\psi)(\tau) \rangle d\tau.$$

Deshalb gilt

$$\|D^{\nu,k}\psi\|^2 - (1-b)\|D^{0,k}\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \langle (R^{-1}\mathcal{M}\psi)(\tau), A_k^\nu(b, \tau)(R^{-1}\mathcal{M}\psi)(\tau) \rangle d\tau. \quad (3.5.95)$$

Die Eigenwerte von  $A_k^\nu(b, \tau)$  sind durch

$$a_{k,\pm}^\nu(b, \tau) := \nu^2 + b/4 + k^2b + \tau^2b \pm (4k^2\nu^2 + 4\nu^2\tau^2 + k^2b^2)^{1/2} \quad (3.5.96)$$

gegeben.

Dementsprechend ist die Behauptung gezeigt, wenn für die Wahl  $b := 1 - K_n^\nu$  gilt:  $b < 1$  und  $a_{k,-}^\nu(b, \tau) \geq 0$  für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $k$ , welche (3.5.93) erfüllen. Da (3.5.96) nicht von den Vorzeichen von  $k$  und  $\tau$  abhängt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $k, \tau \geq 0$  annehmen. Nun setzen wir (3.5.96) auf  $k \in \mathbb{R}$  fort und erhalten für  $k > 0$ , welche (3.5.93) erfüllen, die Ungleichung

$$\begin{aligned} a_{k+1,-}^\nu(b, \tau) - a_{k,-}^\nu(b, \tau) &= \int_k^{k+1} \frac{\partial a_{\varkappa,-}^\nu}{\partial \varkappa}(b, \tau) d\varkappa \\ &= (2k+1)b - \int_k^{k+1} \frac{(4\nu^2 + b^2)\varkappa}{\sqrt{(4\nu^2 + b^2)\varkappa^2 + 4\nu^2\tau^2}} d\varkappa \geq (2k_n^\nu + 1)b - \sqrt{4\nu^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Daraus schlussfolgern wir, dass für  $\tau \in \mathbb{R}$  die Funktion  $k \mapsto a_{k,-}^\nu(b, \tau)$  auf  $[k_n^\nu, \infty) \cap (\mathbb{Z} + (n-1)/2)$  eine wachsende Funktion ist, solange

$$(2k_n^\nu + 1)b - \sqrt{4\nu^2 + b^2} \geq 0,$$

d. h.,

$$b \geq |\nu| / \sqrt{(k_n^\nu)^2 + k_n^\nu}$$

gilt. Für  $\tau > 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{k_n^\nu,-}^\nu(b, \tau)}{\partial \tau} &= 2\tau \left( b - \frac{2\nu^2}{\sqrt{4(k_n^\nu)^2\nu^2 + 4\nu^2\tau^2 + (k_n^\nu)^2b^2}} \right) \\ &\geq 2\tau \left( b - \frac{2\nu^2}{k_n^\nu\sqrt{4\nu^2 + b^2}} \right). \end{aligned}$$

Daher gilt für

$$b \geq \sqrt{2}|\nu|(\sqrt{1 + (k_n^\nu)^{-2}} - 1)^{1/2} \quad \left( > |\nu| / \sqrt{(k_n^\nu)^2 + k_n^\nu} \right) \quad (3.5.97)$$

und alle  $\tau \in \mathbb{R}_+$  die Ungleichung  $(\partial a_{k_n^\nu,-}^\nu / \partial \tau)(b, \tau) \geq 0$  und deshalb für  $k \geq k_n^\nu$

$$a_{k,-}^\nu(b, \tau) \geq a_{k_n^\nu,-}^\nu(b, 0) = \nu^2 + b/4 + (k_n^\nu)^2b - k_n^\nu(4\nu^2 + b^2)^{1/2}. \quad (3.5.98)$$

Die rechte Seite von (3.5.98) ist positiv, solange für  $b > 0$  gilt

$$f^\nu(b) := ((k_n^\nu)^2 - 1/4)^2b^2 + 2((k_n^\nu)^2 + 1/4)\nu^2b + \nu^4 - 4\nu^2(k_n^\nu)^2 \geq 0. \quad (3.5.99)$$

Wir erkennen, dass  $f^\nu$  eine quadratische Funktion mit  $f^\nu(0) < 0$  und  $f^\nu(1) = ((k_n^\nu)^2 - \nu^2 - 1/4)^2 > 0$  ist. Daher hat  $f^\nu$  eine eindeutige Nullstelle in  $(0, 1)$ , welche mit  $1 - K_n^\nu$  übereinstimmt. Deshalb ist für  $b > 0$  (3.5.99) äquivalent zu  $b \geq 1 - K_n^\nu$ . An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass diese Bedingung restriktiver als die Bedingung (3.5.97) ist, da nach

$$\sqrt{2}|\nu|(\sqrt{1 + (k_n^\nu)^{-2}} - 1)^{1/2} \leq |\nu|/k_n^\nu$$

und (3.5.93) die Ungleichung

$$f^\nu(|\nu|/k_n^\nu) \leq \nu^2((k_n^\nu)^{-2}/16 + \nu^2 - (k_n^\nu)^2) \leq \nu^2(1/4 + \nu^2 - (k_n^\nu)^2) < 0$$

gilt.  $\square$

**Korollar 3.5.24** (Lemma 29 in [49] und Lemma IV.5 in [50]). *Für  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  gilt die Operatorungleichung*

$$(D^{\nu,k})^2 \geq \left( \frac{\sqrt{n^2(n+2)^2 + 4\nu^2} - 2(n+1)\nu}{n(n+2)} \right)^2 (\mathcal{U}_k^* R^1 \mathcal{U}_k)^2 \quad (3.5.100)$$

für alle  $k \in (\mathbb{Z} + (n-1)/2) \setminus \{-(n-1)/2, 0, (n-1)/2\}$ .

*Beweis.* Sei  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) = \mathfrak{E}^{\nu,k}$ . Wir wählen ein  $j \in \mathfrak{T}_n$  mit  $\varkappa_j = k$ . Nach (3.5.44), (3.5.33) sowie (3.5.39) und erneut (3.5.44) gilt daher

$$\mathcal{U}_k D^{0,k} \psi = \left( \mathcal{W}_n (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \bigoplus_{j' \in \mathfrak{T}_n} \delta_{j',j} D^{0,\varkappa_{j'}} \psi \right)_j \quad (3.5.101)$$

$$= \left( \mathcal{W}_n (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n) \mathcal{W}_n^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} (R^1 \otimes \sigma_1) \right) \mathcal{W}_n (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \bigoplus_{j' \in \mathfrak{T}_n} \delta_{j',j} \psi \right)_j \quad (3.5.102)$$

$$= (R^1 \otimes \sigma_1) \mathcal{U}_k \psi. \quad (3.5.103)$$

Aus dieser Relation folgt

$$\|\mathcal{U}_k^* R^1 \mathcal{U}_k \psi\|^2 = \|D^{0,k} \psi\|^2. \quad (3.5.104)$$

Daraus folgt mit Lemma 3.5.23 die Behauptung.  $\square$

### 3.5.6 Zum Beweis von Satz 2.3.1

Nach Lemma 3.5.13 gilt

$$\langle \psi, \tilde{H}_k^\alpha \psi \rangle \geq (1 - \alpha/\alpha_k) \langle \psi, R^1 \psi \rangle$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$ ,  $\alpha \in [0, \alpha_k)$  und  $\psi \in \mathfrak{D}(\tilde{H}_k^\alpha)$ . Durch den Übergang zur Friedrichs-Fortsetzung und die Verwendung von (3.5.55) schlussfolgern wir

$$H_k^\alpha \geq (1 - \alpha V_k(0)) R^1 \quad (3.5.105)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0 \cup (\mathbb{N}_0 - 1/2)$ ,  $\alpha \in [0, \alpha_k)$ . Die Monotonie der Wurzel für Operatoren, Lemma 3.5.22 und (3.5.105) impliziert

$$\begin{aligned} |D^{\nu, \pm(n-1)/2}| \geq \eta_n^\nu \min \left\{ 1 - \frac{V_{(n-3)/2}(0)}{V_{(n-3)/2}(i\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2})}, \right. \\ \left. 1 - \frac{V_{(3-n)/2}(0)}{V_{(3-n)/2}(i\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2})} \right\} \mathcal{U}_{\pm(n-1)/2}^* R^1 \mathcal{U}_{\pm(n-1)/2}. \end{aligned} \quad (3.5.106)$$

Auf der anderen Seite gilt

$$|D^{\nu, k}| \geq \frac{\sqrt{n^2(n+2)^2 + 4\nu^2} - 2(n+1)\nu}{n(n+2)} \mathcal{U}_k^* R^1 \mathcal{U}_k \quad (3.5.107)$$

nach Korollar 3.5.24 für alle  $k \in (\mathbb{Z} + (n-1)/2) \setminus \{-(n-1)/2, 0, (n-1)/2\}$ . Daher gilt nach (3.5.33) und (3.5.106) sowie (3.5.107)

$$|\mathbf{D}_n^\nu| \geq C_n^\nu (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \mathcal{U}_{\varkappa_j}^* \right) \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} R^1 \right) \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \mathcal{U}_{\varkappa_j} \right) (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n) \quad (3.5.108)$$

mit

$$\begin{aligned} C_n^\nu := \min \left\{ \eta_n^\nu \left( 1 - \frac{V_{(n-3)/2}(0)}{V_{(n-3)/2}(i\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2})} \right), \right. \\ \left. \eta_n^\nu \left( 1 - \frac{V_{(3-n)/2}(0)}{V_{(3-n)/2}(i\sqrt{(n-1)^2/4 - \nu^2})} \right), \frac{\sqrt{n^2(n+2)^2 + 4\nu^2} - 2(n+1)\nu}{n(n+2)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.109)$$

Aus (3.5.35), (3.5.36) und (3.5.37) schlussfolgern wir

$$\mathcal{W}_n = \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{I}_n} \mathcal{U}_{\varkappa_j} \right) (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n).$$

Daraus folgt mit (3.5.40) und (3.5.108)

$$|\mathbf{D}_n^\nu| \geq C_n^\nu \sqrt{-\Delta}. \quad (3.5.110)$$

### 3.5.7 Zum Beweis von Satz 2.3.4

Lemma 3.5.22 und Korollar 3.5.18 implizieren

$$|D^{(n-1)/2, \pm(n-1)/2}| \geq \eta_n^{(n-1)/2} \left( \min\{K_{(n-3)/2, \lambda}, K_{(3-n)/2, \lambda}\} l^{\lambda-1} \mathcal{U}_{\pm(n-1)/2}^* R^\lambda \mathcal{U}_{\pm(n-1)/2} - l^{-1} \right). \quad (3.5.111)$$

Für  $k \in (\mathbb{Z} + (n-1)/2) \setminus \{-(n-1)/2, 0, (n-1)/2\}$  kombinieren wir (3.5.107) mit der Ungleichung

$$R^1 \geq \lambda^{-\lambda} (1 - \lambda)^{\lambda-1} l^{\lambda-1} R^\lambda - l^{-1},$$

welche aus dem Spektralsatz folgt. Durch eine Rechnung wie im Beweis von Satz 2.3.1 impliziert dies zusammen mit (3.5.111) die Ungleichung (2.3.7) mit der Konstanten

$$K_n^\lambda := \min \left\{ (\eta_n^{(n-1)/2})^\lambda K_{(n-3)/2, \lambda}, (\eta_n^{(n-1)/2})^\lambda K_{(3-n)/2, \lambda}, \lambda^{-\lambda} (1 - \lambda)^{\lambda-1} \left( \frac{\sqrt{n^2(n-1)^{-2}(n+2)^2 + 1} - (n+1)}{n(n-1)^{-1}(n+2)} \right)^\lambda \right\}.$$

## 3.6 Beweis von Satz 2.3.2

Zunächst führen wir

$$\Upsilon^\nu := \sqrt{1 - \nu^2} \quad (3.6.1)$$

ein. Der Beweis von Satz 2.3.1 liefert mit (3.5.109) für  $n = 3$  eine explizite untere Schranke auf die optimale Konstante in (2.3.1), wenn ein expliziter Ausdruck für  $\eta_3^\nu$  gefunden werden kann. Deshalb zeigen wir zuerst in drei Schritten, dass  $\eta^\nu$  (siehe Definition 2.3.3) der maximale Wert für  $\eta_3^\nu$  ist, sodass (3.5.88) für  $|k| = 1$  gilt. Im ersten Schritt zeigen wir in Abschnitt 3.6.1, dass die Abbildung  $\nu \mapsto \eta^\nu$  reell-analytisch und monoton fallend auf  $[0, 1]$  ist. Dies verwenden wir um in Abschnitt 3.6.2 zu beweisen, dass für  $|k| = 1$  der maximale Wert von  $\eta_3^\nu$ , sodass (3.5.88) gilt, gleich  $\eta^\nu$  ist, wenn die auf  $[0, 1]$  definierten Funktionen

$$c_2(\nu) := \frac{16\nu\sqrt{9+4\nu^2}}{9} \left( 72(5+2\nu^2) - \frac{1764\nu}{\sqrt{9+4\nu^2}} + (\sqrt{9+4\nu^2} - 4\nu)^2 \right. \\ \left. \times \left( -4 + \frac{9\pi^2(\pi-4)^2}{4(\pi-2)^2} - \left( \frac{3\pi(4-\pi)}{2(\pi-2)} + \frac{3(\pi-2)}{1-2\Upsilon^\nu \cot(\frac{\pi\Upsilon^\nu}{2})} \right)^2 \right) \right), \quad (3.6.2)$$

$$c_4(\nu) := \frac{(c_2(\nu) + 3136\nu^2)^2}{256\nu^2(9+4\nu^2)} - 3584\nu^2 + 256\nu\sqrt{9+4\nu^2}(1 - (\eta^\nu)^2) \quad (3.6.3)$$

und

$$c_6(\nu) := \frac{2(c_2(\nu) + 3136\nu^2)}{\nu\sqrt{9 + 4\nu^2}}(1 - (\eta^\nu)^2) - 1024\nu^2 \quad (3.6.4)$$

nichtnegativ sind. In Abschnitt 3.6.3 zeigen wir schließlich, dass diese Funktionen nichtnegativ sind. Aus dem dadurch bewiesenen Resultat folgt mit (3.5.109), dass für  $n = 3$  die Konstante in (2.3.1) gleich

$$\min \left\{ \eta^\nu \left( 1 - \frac{V_0(0)}{V_0(i\Upsilon^\nu)} \right), \frac{1}{15}(\sqrt{225 + 4\nu^2} - 8\nu) \right\} \quad (3.6.5)$$

gewählt werden kann. Abschließend zeigen wir in Abschnitt 3.6.4, dass  $S^\nu$  gleich (3.6.5) ist.

### 3.6.1 Eigenschaften von $\eta^\nu$

**Lemma 3.6.1** (Lemma IV.2 in [50]). *Die Abbildung  $\nu \mapsto \eta^\nu$  (siehe (2.3.3)) ist reell-analytisch und monoton fallend auf  $[0, 1]$ .*

*Beweis.* Sowohl  $g(\nu) := (9 + 4\nu^2)^{1/2} - 4\nu$  als auch  $h(\nu) := 3(1 - 2\Upsilon^\nu \cot(\pi\Upsilon^\nu/2))$  (mit der Konvention  $z \cot z|_{z=0} := 1$ ) sind monoton fallende reell-analytische Funktionen auf  $[0, 1]$ , welche den Wert 3 in  $\nu = 0$  annehmen und einfache Nullstellen bei  $\nu = \sqrt{3}/2$  haben. Daher folgt die reelle Analytizität von  $\eta^\nu$  aus eben dieser Eigenschaft des Zählers und Nenners in (2.3.3) und der Kürzung der auftretenden Nullstellen in Zähler und Nenner. Im nachfolgenden Teil des Beweises können wir deshalb  $\nu \in (0, 1)$  annehmen.

Die Monotonie von  $\nu \mapsto \eta^\nu$  folgt aus der Konvexität von  $g$  und Konkavität von  $h$  zusammen mit der Tatsache, dass beide Funktionen monoton fallen und in  $\nu = \sqrt{3}/2$  verschwinden. In der Tat ist  $|g(\nu)|/|\nu - \sqrt{3}/2|$  monoton fallend und  $|h(\nu)|/|\nu - \sqrt{3}/2|$  monoton wachsend. Für  $\nu_1 < \nu_2 \in (0, 1) \setminus \{\sqrt{3}/2\}$  gilt daher

$$\frac{g(\nu_2)}{h(\nu_2)} = \frac{|g(\nu_2)|}{|h(\nu_2)|} \leq \frac{|g(\nu_1)|}{|h(\nu_1)|} = \frac{g(\nu_1)}{h(\nu_1)}.$$

Die behauptete Konvexität von  $g$  und Konkavität von  $h$  kann durch das Studieren der zweiten Ableitungen beobachtet werden. Es gilt nämlich  $g''(\nu) =$

$$\begin{aligned}
 & 36(9 + 4\nu^2)^{-3/2} > 0 \text{ und } h''(\nu) = 3(f_1(\nu) - f_2(\nu)) \text{ mit} \\
 & \frac{\nu^2(\pi\Upsilon^\nu \sin(\pi\Upsilon^\nu/2) - \pi^2(\Upsilon^\nu)^2 \cos(\pi\Upsilon^\nu/2) + 2 \cos(\pi\Upsilon^\nu/2) \sin^2(\pi\Upsilon^\nu/2))}{(\Upsilon^\nu)^3 \sin^3(\pi\Upsilon^\nu/2)} \\
 & =: f_1(\nu) < 2
 \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

und

$$f_2(\nu) := \frac{\pi\Upsilon^\nu - \sin(\pi\Upsilon^\nu)}{\Upsilon^\nu \sin^2(\pi\Upsilon^\nu/2)} > 2. \tag{3.6.7}$$

Um (3.6.6) zu rechtfertigen, kombinieren wir für  $z \in [0, \pi/2]$  die elementaren Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 2z \sin z &\leq 2z^2 - \frac{z^4}{3} + \frac{z^6}{60}, \\
 -4z^2 \cos z &\leq -4z^2 + 2z^4 - \frac{z^6}{6} + \frac{z^8}{180}, \\
 2(\cos z) \sin^2 z &= (\cos z)(1 - \cos(2z)) \leq \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24}\right) \left(2z^2 - \frac{2z^4}{3} + \frac{4z^6}{45}\right),
 \end{aligned}$$

welche aus der Taylor-Entwicklung von  $\sin z$  und  $\cos z$  in  $z = 0$  folgen, um

$$\begin{aligned}
 2z \sin z - 4z^2 \cos z + 2(\cos z) \sin^2 z &\leq \frac{16}{45}z^6 - \frac{z^8}{15} + \frac{z^{10}}{270} \\
 &\leq \frac{16}{45}z^6 + \left(-\frac{1}{15} + \frac{\pi^2}{4 \cdot 270}\right)z^8 \leq \frac{16}{45}z^6
 \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

zu schlussfolgern. Analog erhalten wir für  $z \in [0, \pi/2]$

$$\sin^3 z \geq \left(z - \frac{z^3}{6}\right)^3 \geq z^3 - \frac{z^5}{2} + \left(\frac{1}{12} - \frac{\pi^2}{4 \cdot 216}\right)z^7. \tag{3.6.9}$$

Durch die Multiplikation von (3.6.6) mit dem Nenner der linken Seite und der Anwendung der Ungleichungen (3.6.8) und (3.6.9) schlussfolgern wir die Gültigkeit von (3.6.6). Die Ungleichung (3.6.7) folgt für  $z \in [0, \pi/2]$  analog aus

$$\begin{aligned}
 2z - \sin(2z) &\geq \frac{4z^3}{3} - \frac{4z^5}{15} \quad \text{und} \\
 \sin^2 z &= \frac{1 - \cos(2z)}{2} \leq z^2 - \frac{z^4}{3} + \frac{2z^6}{45}.
 \end{aligned}$$

□

### 3.6.2 Die optimale Konstante in (3.5.88)

**Lemma 3.6.2** (Teil von Lemma IV.3 in [50]). *Sei  $\nu \in [0, 1]$ . Für  $|k| = 1$  ist der maximale Wert von  $\eta_3^\nu$ , sodass (3.5.88) gilt, gleich  $\eta^\nu$ , wenn die Funktionen  $c_k$  (siehe (3.6.2), (3.6.3) und (3.6.4)) auf  $[0, 1]$  für alle  $k \in \{2, 4, 6\}$  nichtnegativ sind.*

*Beweis.* Aufgrund der Argumentation zu Beginn des Beweises von Lemma 3.5.20, können wir uns auf den Fall  $k = 1$  beschränken. Für  $\tau \in \mathbb{R}$  betrachten wir

$$P_1(\tau) := \frac{\Gamma((3 - 2i\tau)/4)\Gamma((1 + 2i\tau)/4)}{\Gamma((3 + 2i\tau)/4)\Gamma((1 - 2i\tau)/4)}.$$

Für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  gelten

$$|P_1(\tau)| = 1 \tag{3.6.10}$$

und (siehe 5.4.5, 4.35.11, 4.35.16, 4.35.19, 4.28.4 und 4.28.6 in [55])

$$P_1(\tau) = \operatorname{sech}(\pi\tau) - i \tanh(\pi\tau). \tag{3.6.11}$$

Nach (3.5.29) erhalten wir

$$V_0(\tau + i/2) = \frac{2}{1 - 2i\tau} P_1(\tau), \quad V_1(\tau - i/2) = \frac{2(1 + 2i\tau)}{(1 - 2i\tau)(3 + 2i\tau)} P_1(\tau).$$

Daher schlussfolgern wir nach (3.5.76) für  $\tau \in \mathbb{R}$  die Relation

$$(M_1^\nu(\tau))^* M_1^\nu(\tau) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4\nu^2}{1 + 4\tau^2} & \frac{-8\nu(1 - i\tau)\overline{P_1(\tau)}}{(1 + 2i\tau)(3 - 2i\tau)} \\ \frac{-8\nu(1 + i\tau)P_1(\tau)}{(1 - 2i\tau)(3 + 2i\tau)} & 1 + \frac{4\nu^2}{9 + 4\tau^2} \end{pmatrix}. \tag{3.6.12}$$

Die analytische Fortsetzung von  $z \cot z$  auf  $z = 0$  bezeichnen wir im nachfolgenden Text mit  $z \cot z$ , d. h.  $z \cot z|_{z=0} := 1$ . Die Relationen (3.5.87), (3.6.10) und (3.6.11) implizieren

$$\begin{aligned} K_1^\nu(\tau) = & \left( 1 + 4\tau^2 + 4(\Upsilon^\nu)^2 \cot^2\left(\frac{\pi\Upsilon^\nu}{2}\right) \right. \\ & \left. - 4\Upsilon^\nu \cot\left(\frac{\pi\Upsilon^\nu}{2}\right) (\operatorname{sech}(\pi\tau) + 2\tau \tanh(\pi\tau)) \right) / (1 + 4\tau^2). \end{aligned} \tag{3.6.13}$$



Die Ungleichung (3.5.88) ist äquivalent zu der Nichtnegativität des kleinsten Eigenwertes von

$$(M_1^\nu(\tau))^* M_1^\nu(\tau) - (\eta^\nu)^2 K_1^\nu(\tau) \mathbb{I}_{\mathbb{C}^2}.$$

Durch die Verwendung von (3.6.12) und (3.6.13) finden wir, dass dieser Eigenwert durch

$$\begin{aligned} \lambda(\tau) = & 1 - (\eta^\nu)^2 K_1^\nu(\tau) \\ & + \frac{4\nu^2(5 + 4\tau^2) - 8\nu(4\nu^2 + (1 + \tau^2)(1 + 4\tau^2)(9 + 4\tau^2))^{1/2}}{(1 + 4\tau^2)(9 + 4\tau^2)} \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

gegeben ist. Daher genügt es die Nichtnegativität von (3.6.14) mit  $\eta^\nu$  definiert in (2.3.3) zu zeigen. Durch die Verwendung von (3.6.13) und (2.3.3) erkennen wir, dass die rechte Seite von (3.6.14) für  $\tau = 0$  verschwindet, d. h., der Wert von  $\eta^\nu$  kann nicht vergrößert werden.

Wir schlussfolgern durch die Multiplikation von (3.6.14) mit  $(1 + 4\tau^2)(9 + 4\tau^2)$  und das Umformen des entstehenden Ausdrucks mit (3.6.13), dass es genügt die Nichtnegativität von

$$\begin{aligned} p(\tau, \nu) := & (1 - (\eta^\nu)^2)(1 + 4\tau^2)(9 + 4\tau^2) + 4\nu^2(5 + 4\tau^2) \\ & + 4\Upsilon^\nu(\eta^\nu)^2(9 + 4\tau^2)(\operatorname{sech}(\pi\tau) + 2\tau \tanh(\pi\tau)) \cot(\pi\Upsilon^\nu/2) \\ & - 4(\Upsilon^\nu)^2(\eta^\nu)^2(9 + 4\tau^2) \cot^2(\pi\Upsilon^\nu/2) \\ & - 8\nu(4\nu^2 + (1 + \tau^2)(1 + 4\tau^2)(9 + 4\tau^2))^{1/2} \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

für alle  $(\tau, \nu) \in [0, \infty) \times [0, 1]$  zu beweisen.

Aus der Positivität aller Koeffizienten der Taylor-Reihe in  $\tau = 0$  von

$$(9 + 4\tau^2)(1 + 2\tau \sinh(\pi\tau)) - (9 + (4 + 18\pi - 9\pi^2/2)\tau^2) \cosh(\pi\tau)$$

schlussfolgern wir, dass

$$(9 + 4\tau^2)(\operatorname{sech}(\pi\tau) + 2\tau \tanh(\pi\tau)) \geq 9 + (4 + 18\pi - 9\pi^2/2)\tau^2$$

für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  gilt. Daher folgt die Nichtnegativität von (3.6.15) aus der Ungleichung

$$p_+(\tau, \nu) \geq p_-(\tau, \nu) \quad (3.6.16)$$

mit

$$\begin{aligned} p_+(\tau, \nu) := & (1 - (\eta^\nu)^2)(1 + 4\tau^2)(9 + 4\tau^2) + 4\nu^2(5 + 4\tau^2) \\ & + 4\Upsilon^\nu(\eta^\nu)^2(9 + (4 + 18\pi - 9\pi^2/2)\tau^2) \cot(\pi\Upsilon^\nu/2) \\ & - 4(\Upsilon^\nu)^2(\eta^\nu)^2(9 + 4\tau^2) \cot^2(\pi\Upsilon^\nu/2) \end{aligned}$$

und

$$p_-(\tau, \nu) := 8\nu(4\nu^2 + (1 + \tau^2)(1 + 4\tau^2)(9 + 4\tau^2))^{1/2}.$$

Da für  $x \in [0, 1]$

$$x^2 \cot^2(\pi x/2) \leq x \cot(\pi x/2) < 1$$

gilt und die Abbildung  $\nu \mapsto \eta^\nu$  monoton fallend auf  $[0, 1]$  ist (siehe Lemma 3.6.1), folgt  $\eta^\nu \leq \eta^0 = 1$ . Daraus schlussfolgern wir  $p_+(\tau, \nu) \geq 0$ . Daher ist (3.6.16) äquivalent zu

$$(p_+(\tau, \nu))^2 - (p_-(\tau, \nu))^2 = c_2(\nu)\tau^2 + c_4(\nu)\tau^4 + c_6(\nu)\tau^6 + c_8(\nu)\tau^8 \geq 0 \quad (3.6.17)$$

mit

$$c_8(\nu) := 256(1 - (\eta^\nu)^2)^2.$$

□

### 3.6.3 Die Nichtnegativität von $c_2$ , $c_4$ und $c_6$

Zuerst zeigen wir Abschätzungen auf die Funktion  $z \mapsto z \cot z$  mit der Konvention  $z \cot z|_{z=0} := 1$ .

**Lemma 3.6.3** (Lemma VII.1 in [50]).

(a) Für  $m \in \mathbb{N}$  sei

$$F_m(\nu) := \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{16j^2}{\pi(4j^2 - 1)^{k+1}} \right) \nu^{2k}.$$

Dann gelten für alle  $\nu \in [0, 1]$  und  $m \in \mathbb{N}$  die Ungleichungen

$$F_{2m}(\nu) \leq \Upsilon^\nu \cot(\pi \Upsilon^\nu/2) \leq F_{2m-1}(\nu). \quad (3.6.18)$$

(b) Für  $m \in \mathbb{N}$  seien

$$S_m := \frac{2^{2m+2}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2m+1}} \quad \text{und} \quad T_m := \frac{2^{2m+1}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2m}}. \quad (3.6.19)$$

Dann gelten für alle  $x \in (-1/2, 0]$  und  $m \in \mathbb{N}$  die Ungleichungen

$$\left(\frac{1}{2} + x\right) \cot\left(\frac{\pi(1/2 + x)}{2}\right) \geq \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{S_j}{2} - T_j\right) x^{2j} + \left(S_{j-1} - \frac{T_j}{2}\right) x^{2j-1}. \quad (3.6.20)$$

(c) Für alle  $x \in [0, 1/2)$  und  $l, k \in \mathbb{N}$  gelten die Ungleichungen

$$\left(\frac{1}{2} + x\right) \cot\left(\frac{\pi(\frac{1}{2} + x)}{2}\right) \leq \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^l \left(\frac{S_j}{2} - T_j\right) x^{2j} + \sum_{j=1}^k \left(S_{j-1} - \frac{T_j}{2}\right) x^{2j-1}. \quad (3.6.21)$$

*Beweis.* Zu (a): Durch die Anwendung von (3.6.1), der Reihendarstellung 4.22.3 in [55] und der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\Upsilon^\nu \cot\left(\frac{\pi \Upsilon^\nu}{2}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16m^2}{\pi(4m^2 - 1)^{1+k}} \right) \nu^{2k}. \quad (3.6.22)$$

Nun setzen wir  $\nu := 0$  in (3.6.22) und bekommen

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} = 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Beobachtung, dass die Terme in der letzten Reihe in (3.6.22) alternieren und ihre Beträge monoton fallen.

Zu (b), (c): Nach 4.19.5, 24.8.4 und 24.2.9 in [55] erhalten wir

$$\sec(\pi x) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^{2m} \quad \text{für } |x| < 1/2. \quad (3.6.23)$$

Nach 4.19.3, 25.6.2, 24.2.2 und 25.2.2 in [55] gilt

$$\tan(\pi x) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m x^{2m-1} \quad \text{für } |x| < 1/2. \quad (3.6.24)$$

Durch die Anwendung der trigonometrischen Identität

$$\cot\left(\pi(1/2 + x)/2\right) = \sec(\pi x) - \tan(\pi x)$$

schlussfolgern wir

$$\left(\frac{1}{2} + x\right) \cot\left(\frac{\pi(1/2 + x)}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \left(\frac{S_j}{2} - T_j\right) x + \left(S_{j-1} - \frac{T_j}{2}\right) \right) x^{2j-1}. \quad (3.6.25)$$

Da die Relationen (3.6.23) und (3.6.24)

$$\frac{S_j}{2} - T_j < 0 \quad \text{und} \quad S_{j-1} - \frac{T_j}{2} < 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \quad (3.6.26)$$

implizieren, folgt (3.6.21) mit  $x \in [0, 1/2]$  aus (3.6.25).

Für  $x \in (-1/2, 0]$  schlussfolgern wir durch die Verwendung von (3.6.26) und (3.6.19), dass für  $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_j}{2} - T_j\right)x + \left(S_{j-1} - \frac{T_j}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left(T_j - \frac{S_j}{2}\right) + S_{j-1} - \frac{T_j}{2} \\ &= S_{j-1} - \frac{S_j}{4} = \frac{2^{2j}}{\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)^2 - 1}{(2k+1)^{2j+1}} \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

gilt. Zusammen mit (3.6.25) und  $x^{2j-1} \leq 0$  liefert dies die untere Schranke (3.6.20).  $\square$

**Die Nichtnegativität von  $c_2$  für  $\nu \in [0, 3/5]$**  Sei  $b_1(\nu)$  die rechte Seite von (3.6.2) aber mit  $\pi\nu^2/2$  anstelle von  $2\Upsilon^\nu \cot(\pi\Upsilon^\nu/2)$ . Die Ungleichung

$$1 - 2\Upsilon^\nu \cot(\pi\Upsilon^\nu/2) \geq 1 - \pi\nu^2/2, \quad (3.6.28)$$

welche aus (3.6.18) folgt, impliziert, dass  $b_1(\nu) \leq c_2(\nu)$  für alle  $\nu$  gilt, für welche die rechte Seite von (3.6.28) positiv bleibt. Deshalb gilt  $b_1(\nu) \leq c_2(\nu)$  für alle  $\nu \in [0, 3/5]$ . Daher folgt die Nichtnegativität von  $c_2(\nu)$  aus der Nichtnegativität von

$$\frac{9(\pi\nu^2 - 2)^2}{32\nu^2} b_1(\nu) = p_1(\nu) + q_1(\nu), \quad (3.6.29)$$

wobei

$$\begin{aligned} p_1(\nu) &:= 2232 + (2560 + 2952\pi - 2592\pi^2 + 648\pi^3)\nu^2 \\ &\quad + (288\pi^3 - 256\pi - 1890\pi^2)\nu^4 + 64\pi^2\nu^6 \geq 0 \quad \text{für alle } \nu \in [0, 3/5] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} q_1(\nu) &:= ((324\pi^2 - 1312 - 648\pi - 81\pi^3)\nu \\ &\quad + (882\pi^2 - 128\pi - 180\pi^3)\nu^3 + 32\pi^2\nu^5)\sqrt{9 + 4\nu^2}. \end{aligned}$$

Um die Nichtnegativität von (3.6.29) zu beweisen, ist es daher ausreichend die Nichtnegativität von

$$p_2(\nu) := p_1^2(\nu) - q_1^2(\nu)$$

zu beweisen, welche in  $\nu^2$  ein Polynom vom Grad fünf ist. Die Nichtnegativität von  $p_2$  für  $\nu \in [0, 3/5]$  folgt direkt aus der Tatsache, dass

$$p_3(y) := p_2(\sqrt{9/25 - y})$$

ein Polynom mit positiven Koeffizienten ist und daher für alle  $y \in [0, 9/25]$  positiv ist.

**Die Nichtnegativität von  $c_2$  für  $\nu \in [3/5, 1]$**  Zunächst führen wir die Substitution  $\nu := \sqrt{1 - (1/2 + x)^2}$  mit  $x \in [-1/2, 1/2]$  aus. Außerdem definieren wir

$$r_1(x) := \sqrt{12 - 4x - 4x^2} \quad \text{und} \quad r_2(x) := \sqrt{3 - 4x - 4x^2}.$$

Dementsprechend ist die Nichtnegativität von  $c_2(\nu)$  für  $\nu \in [0, 1]$  äquivalent zur Nichtnegativität von

$$\begin{aligned} d_2(x) &:= \frac{9c_2(\sqrt{1 - (1/2 + x)^2})}{16\sqrt{1 - (1/2 + x)^2}} \\ &= r_1(x) \left( 36(13 - 4x - 4x^2) - 882 \frac{r_2(x)}{r_1(x)} + (r_1(x) - 2r_2(x))^2 \right. \\ &\quad \times \left. \left( \frac{9\pi^2(4 - \pi)^2}{4(\pi - 2)^2} - 4 - \left( \frac{3\pi(4 - \pi)}{2(\pi - 2)} + \frac{3(\pi - 2)}{1 - 2(1/2 + x) \cot(\pi(1/2 + x)/2)} \right)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

für  $x \in [-1/2, 1/2]$ . Nun führen wir für  $x \in [-1/2, 1/2]$  die Funktionen

$$h(x) := 1 + (2 - \pi)x + \left( \frac{\pi^2}{2} - 2\pi \right) x^2 + \left( \pi^2 - \frac{\pi^3}{3} \right) x^3 + \left( \frac{5\pi^4}{24} - \frac{2\pi^3}{3} \right) x^4$$

und

$$l(x) := 2(1/2 + x) \cot(\pi(1/2 + x)/2)$$

ein. Nach Lemma 3.6.3 (c) und (3.6.26) erhalten wir

$$1 - l(x) \geq 1 - h(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in [0, 1/2]. \quad (3.6.30)$$

Auf der anderen Seite implizieren Lemma 3.6.3 (b), (3.6.27) und die Monotonie von  $y \mapsto y \cot y$  auf  $[0, \pi/2]$ , dass

$$1 - l(-1/2) \leq 1 - l(x) \leq 1 - h(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in [-1/2, 0] \quad (3.6.31)$$

gilt. Aus der Kombination von (3.6.30) und (3.6.31) schlussfolgern wir

$$\left( \frac{3\pi(4-\pi)}{2(\pi-2)} + \frac{3(\pi-2)}{1-l(x)} \right)^2 \leq \left( \frac{3\pi(4-\pi)}{2(\pi-2)} + \frac{3(\pi-2)}{1-h(x)} \right)^2$$

und daher ist

$$\begin{aligned} b_2(x) := & r_1(x) \left( 36(13 - 4x - 4x^2) - 882 \frac{r_2(x)}{r_1(x)} + (r_1(x) - 2r_2(x))^2 \right. \\ & \times \left( \frac{9\pi^2(4-\pi)^2}{4(\pi-2)^2} - 4 - \left( \frac{3\pi(4-\pi)}{2(\pi-2)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3(\pi-2)}{(\pi-2)x + (2\pi - \frac{\pi^2}{2})x^2 + (\frac{\pi^3}{3} - \pi^2)x^3 + (\frac{2\pi^3}{3} - \frac{5\pi^4}{24})x^4} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

eine untere Schranke für  $d_2(x)$  für alle  $x \in [-1/2, 1/2]$ . Um die Nichtnegativität von  $c_2(\nu)$  für  $\nu \in [3/5, 1]$  zu zeigen, ist es daher ausreichend die Nichtnegativität von  $b_2(x)$  für  $x \in [-1/2, 3/10]$  zu beweisen, welche wiederum äquivalent zur Nichtnegativität von

$$\begin{aligned} g_2(y) := & \frac{1}{4}(1-2y)^2(384 - 5\pi^4 + (30\pi^4 - 384\pi - 96\pi^2 - 32\pi^3)y \\ & + (192\pi^2 + 128\pi^3 - 60\pi^4)y^2 + (40\pi^4 - 128\pi^3)y^3)^2 b_2(y - 1/2) \end{aligned}$$

für  $y \in [0, 4/5]$  ist. Durch die Entwicklung von  $g_2$  erhalten wir die Darstellung

$$g_2(y) = p_4(y)\sqrt{1-y^2} + p_5(y)\sqrt{13-4y^2} \quad (3.6.32)$$

mit den Polynomen des zehnten Grades  $p_4$  und  $p_5$ . Wir behaupten, dass

$$p_4(y) = \sum_{k=0}^{10} v_k y^k$$

für alle  $y \in [0, 4/5]$  positiv ist. Man erhält nämlich eine untere Schranke auf  $p_4$ , indem man die positiven Koeffizienten  $v_5$ ,  $v_7$  und  $v_9$  durch null ersetzt, für  $k = 3, 4, 6, 8, 10$  (für diese ist  $v_k$  negativ) den Term  $v_k y^k$  von unten durch  $(4/5)^{k-2} v_k y^2$  abschätzt und  $v_1 y$  von unten durch  $4v_1/5$  (weil  $v_1$  negativ ist) abschätzt. Dieses Verfahren führt auf die Abschätzung

$$p_4(y) \geq \tilde{v}_0 + \tilde{v}_2 y^2 > 0 \quad \text{für } y \in [0, 4/5],$$

wobei die letzte Abschätzung aus der Positivität von  $\tilde{v}_0$  und  $\tilde{v}_2$  folgt. Für die Nichtnegativität von (3.6.32) auf  $[0, 4/5]$  ist es daher ausreichend die

Positivität des Polynoms vom Grad 16

$$p_6(y) := \frac{p_4^2(y)(1-y^2) - p_5^2(y)(13-4y^2)}{81(1-2y)^4} = \sum_{k=0}^{16} w_k y^k$$

auf diesem Intervall zu zeigen. Nun sei  $y \in [0, 4/5]$ . Man erhält eine untere Schranke für  $p_6(y)$ , indem man die positiven Koeffizienten  $w_{13}$  und  $w_{15}$  durch null ersetzt. Für alle  $k \geq 7$  mit  $k \notin \{13, 15\}$  gilt  $w_k < 0$  und deshalb auch die Abschätzung  $w_k y^k \geq (4/5)^{k-6} w_k y^6$ . Für  $k \in \{1, \dots, 5\}$  gilt  $w_k > 0$  und deshalb auch die Abschätzung  $w_k y^k \geq w_k y^6$ . Daraus folgt  $p_6(y) \geq w_0 + \tilde{w}_6 y^6$  mit  $w_0, \tilde{w}_6 > 0$ .

**Die Nichtnegativität von  $c_4(\nu)$  für  $\nu \in [0, 1]$**  Aufgrund der Nichtnegativität von  $c_2$  erhalten wir die untere Schranke

$$16\nu \left( -224\nu + \frac{2401\nu}{9+4\nu^2} + 16\sqrt{9+4\nu^2}(1-(\eta^\nu)^2) \right) \quad (3.6.33)$$

auf (3.6.3). Nach Lemma 3.6.1 ist der letzte Term nichtnegativ und monoton wachsend. Da die Summe der ersten beiden Terme für  $\nu \in [0, \sqrt{55/128}]$  nichtnegativ ist, genügt es die Positivität von 3.6.33 für  $\nu \in [\sqrt{55/128}, 1]$  zu zeigen. Wegen Konkavität gilt die Abschätzung

$$-224\nu + \frac{2401\nu}{9+4\nu^2} \geq \frac{7}{26}(16+\sqrt{110})(\sqrt{110}-16\nu) \quad (3.6.34)$$

(die rechte Seite ist eine lineare Interpolation zwischen den Werten der linken Seite an den Stellen  $\nu = \sqrt{55/128}$  und  $\nu = 1$ ). Außerdem gilt wegen Konkavität

$$\sqrt{9+4\nu^2} \geq \frac{9+4\nu}{\sqrt{13}} \quad (3.6.35)$$

(die rechte Seite beschreibt die Tangente an die linke Seite im Punkt  $\nu = 1$ ). Setzt man nun (3.6.34) und (3.6.35) in (3.6.33) ein und verwendet  $\eta^\nu \leq \eta^{\sqrt{55/128}}$  für  $\nu \in [\sqrt{55/128}, 1]$ , so erhält man die untere Schranke

$$16\nu \left( \frac{7}{26}(16+\sqrt{110})(\sqrt{110}-16\nu) + \frac{16(9+4\nu)}{\sqrt{13}}(1-(\eta^{\sqrt{55/128}})^2) \right)$$

auf (3.6.3), wobei der letzte Faktor eine fallende lineare Funktion ist, welche für  $\nu \leq 1$  positiv ist.

**Die Nichtnegativität von  $c_6(\nu)$  für  $\nu \in [0, 1]$**  Aufgrund der Nichtnegativität von  $c_2$  gilt die Ungleichung

$$c_6(\nu) \geq \frac{6272\nu(1 - (\eta^\nu)^2)}{\sqrt{4\nu^2 + 9}} - 1024\nu^2.$$

Die Nichtnegativität der rechten Seite ist äquivalent zu

$$1 - (\eta^\nu)^2 \geq (8/49)\nu\sqrt{4\nu^2 + 9}, \quad (3.6.36)$$

wobei nach Lemma 3.6.1 beide Seiten monoton wachsen. Daher folgt aus

$$1 - (\eta^{1/2})^2 > (8/49)\sqrt{13},$$

dass (3.6.36) für  $\nu \in [1/2, 1]$  gilt. Deshalb beschränken wir uns nun auf  $\nu \in [0, 1/2]$ . Durch die Verwendung des expliziten Ausdruck von  $\eta^\nu$  (siehe (2.3.3)) und Abschätzung (3.6.28) erkennen wir, dass (3.6.36) aus

$$(1280 + 288\pi\nu^2 - 72\pi^2\nu^4)\sqrt{4\nu^2 + 9} \geq 441\pi^2\nu^3 - (1764\pi + 3920)\nu \quad (3.6.37)$$

folgt. Diese Ungleichung wiederum folgt aufgrund der Positivität der linken Seite für  $\nu \in [0, 1/2]$  aus der Nichtnegativität des Polynoms

$$\begin{aligned} p_7(\nu) &:= (1280 + 288\pi\nu^2 - 72\pi^2\nu^4)^2(4\nu^2 + 9) - (441\pi^2\nu^3 - 1764\pi - 3920)^2\nu^2 \\ &=: \sum_{k=0}^5 a_{2k}\nu^{2k}, \end{aligned}$$

welche wir abschließend zeigen wollen. Da  $a_{10} \geq 0$  und  $a_8, a_6 < 0$  gelten die Abschätzungen  $a_8\nu^8 \geq (1/2)^4 a_8\nu^4$  und  $a_6\nu^6 \geq (1/2)^2 a_6\nu^4$ . Durch deren Anwendung erhalten wir

$$p_7(\nu) \geq a_0 + a_2\nu^2 + (a_4 + (1/2)^4 a_8 + (1/2)^2 a_6)\nu^4,$$

wobei die rechte Seite positiv ist.

### 3.6.4 Bestimmung einer unteren Schranke

Aus Relation (3.5.29) schlussfolgern wir die Identität

$$\eta^\nu \left( 1 - \frac{V_0(0)}{V_0(i\Upsilon^\nu)} \right) = \frac{\pi}{12} (\sqrt{9 + 4\nu^2} - 4\nu) + (1 - \pi/4)\eta^\nu.$$

Daraus folgt nach Lemma 3.6.1 und der Konkavität der Wurzel

$$\eta^\nu \left( 1 - \frac{V_0(0)}{V_0(i\Upsilon^\nu)} \right) \leq \frac{\pi}{12} (3(1 + 2\nu^2/9) - 4\nu) + (1 - \pi/4). \quad (3.6.38)$$



Durch den Vergleich der Abschätzung

$$\frac{1}{15}(\sqrt{225 + 4\nu^2} - 8\nu) \geq \frac{\sqrt{225} - 8\nu}{15} \geq \frac{\pi}{12} \left( 3 \left( 1 + \frac{2\nu^2}{9} \right) - 4\nu \right) + \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

mit (3.6.38) erkennen wir, dass das Minimum in (3.6.5) gleich

$$\eta^\nu \left( 1 - \frac{V_0(0)}{V_0(i\Upsilon^\nu)} \right) = S^\nu \quad (3.6.39)$$

ist.

### 3.7 Beweis von Korollar 2.3.3

Die explizite Kenntnis der Eigenwerte in der Lücke der massiven Coulomb-Dirac-Operatoren [20, 73] liefert die Ungleichungen

$$(\mathbf{D}_n^{\nu, M})^2 \geq M^2(1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2). \quad (3.7.1)$$

Aus (3.7.1) folgt wiederum

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_n^{\nu, M})^2 &= (1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2)(\mathbf{D}_n^\nu)^2 \\ &\quad + 4(n-1)^{-2}\nu^2(\mathbf{D}_n^{\nu, M\nu^{-2}(n-1)^{2/4}})^2 + M^2(1 - \nu^{-2}(n-1)^2/4) \\ &\geq (1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2)(\mathbf{D}_n^\nu)^2. \end{aligned}$$

Aufgrund der Monotonie der Wurzel für Operatoren und Satz (2.3.1) schlussfolgern wir (2.3.4).

Für eine konvexe Kombination aus (2.3.4) und der Wurzel von (3.7.1) erhalten wir für jedes  $t \in [0, 1]$  die Ungleichung

$$|\mathbf{D}_n^{\nu, M}| \geq \sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2} (tC_n^\nu(-\Delta)^{1/2} + (1-t)M).$$

Aus der Berechnung von

$$\max_{t \in [0, 1]} \inf_{p \in [0, \infty)} \frac{tC_n^\nu p + (1-t)M}{\sqrt{p^2 + M^2}}$$

schlussfolgern wir

$$|\mathbf{D}_n^{\nu, M}| \geq \frac{\sqrt{1 - 4(n-1)^{-2}\nu^2} C_n^\nu}{1 + C_n^\nu} |\mathbf{D}_n^{0, M}|.$$

Zusammen mit der Abschätzung

$$|\mathbf{D}_3^{\nu, M}| \geq (1 - 2\nu) |\mathbf{D}_3^{0, M}|,$$

welche sofort aus der Hardy-Ungleichung folgt (siehe Lemma 1 in [1]), erhalten wir (2.3.5).

### 3.8 Beweis von Lemma 2.5.1

Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $B_\varepsilon \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N \times N})$ , sodass für

$$V_\varepsilon := V_+ - B_\varepsilon \quad (3.8.1)$$

gilt

$$V_\varepsilon \geq 0 \quad \text{und} \quad \|(\operatorname{Sp} V_\varepsilon)^{n+\gamma}\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon^{n+\gamma}.$$

Nach den Ungleichungen von Hölder und Sobolev gibt es ein  $C_{n,\text{Sob}} > 0$ , sodass für alle  $\psi \in \mathbf{P}_{n,+}^\nu \mathfrak{D}(|\mathbf{D}_n^\nu|^{1/2})$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \psi(\mathbf{x}), V_\varepsilon(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \leq \varepsilon \|\psi\|_{\mathbf{L}^{\frac{2(n+\gamma)}{n+\gamma-1}}(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \varepsilon C_{n,\text{Sob}} \|(-\Delta)^{\frac{n}{4(n+\gamma)}} \psi\|^2. \quad (3.8.2)$$

Nun implizieren (2.3.1) und die Ungleichung  $(-\Delta)^{\frac{n}{2(n+\gamma)}} \leq (-\Delta)^{1/2} + 1$  die Abschätzung

$$\|(-\Delta)^{\frac{n}{4(n+\gamma)}} \psi\|^2 \leq (C_n^\nu)^{-1} \| |\mathbf{D}_n^\nu|^{1/2} \psi \|^2 + \|\psi\|^2 \quad (3.8.3)$$

für jedes  $\nu \in [0, (n-1)/2]$  und  $\gamma \geq 0$ . Für  $\nu = (n-1)/2$  und  $\gamma > 0$  verwenden wir (2.3.7) mit  $\lambda := n/(n+\gamma)$ ,  $a := (K_n^{n/(n+\gamma)})^{(n+\gamma)/\gamma}$  und erhalten

$$\|(-\Delta)^{\frac{n}{4(n+\gamma)}} \psi\|^2 \leq \| |\mathbf{D}_n^{(n-1)/2}|^{1/2} \psi \|^2 + (K_n^{n/(n+\gamma)})^{-(n+\gamma)/\gamma} \|\psi\|^2. \quad (3.8.4)$$

Aus der Kombination von (3.8.1) sowie (3.8.2) mit (3.8.3) oder (3.8.4) schlussfolgern wir, dass  $V$  eine infinitesimale Formstörung von  $\mathbf{f}_n^\nu(0)$  für alle  $(\nu, \gamma) \in ([0, (n-1)/2] \times [0, \infty)) \setminus \{((n-1)/2, 0)\}$  ist. Dies zusammen mit (2.5.2) impliziert, dass für ein  $-M \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{f}_n^\nu(V)[\cdot] + (M+1)\|\cdot\|^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_n^\nu(0)[\cdot] + \|\cdot\|^2$$

äquivalente Normen auf  $\mathbf{P}_{n,+}^\nu \mathfrak{D}(|\mathbf{D}_n^\nu|^{1/2})$  sind (siehe für mehr Details z. B. den Beweis von Satz X.17 in [58]).

### 3.9 Beweis von Satz 2.5.2

Durch die Verwendung des Spektralsatzes und Ungleichung (2.3.1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \text{Rang}(\mathbf{F}_n^\nu(V))_- &= \sup \dim \left\{ \mathcal{X} \text{ Teilraum von } \mathbf{P}_{n,+}^\nu \mathfrak{D}(|\mathbf{D}_n^\nu|^{1/2}) : \right. \\
 &\quad \left. \mathbf{f}_n^\nu(V)[\psi] < 0 \text{ für alle } \psi \in \mathcal{X} \setminus \{0\} \right\} \\
 &\leq \sup \dim \left\{ \mathcal{X} \text{ Teilraum von } \mathbf{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N) : \text{ Für alle } \psi \in \mathcal{X} \setminus \{0\} \right. \\
 &\quad \left. \text{gilt } \|(-\Delta)^{1/4}\psi\|^2 - (C_n^\nu)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \psi(\mathbf{x}), V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} < 0. \right\} \\
 &= \text{Rang}((-\Delta)^{1/2} - (C_n^\nu)^{-1}V)_-.
 \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.5.3) folgt daraus die Behauptung.

### 3.10 Beweis von Satz 2.5.3

Für  $\nu < (n-1)/2$  folgt die Behauptung aus Satz 2.5.2 in der üblichen Art und Weise. Dieses Verfahren funktioniert wie folgt. Zuerst schlussfolgern wir aus der Integraldarstellung der Summe der  $\gamma$ -ten Potenz der Beträge der negativen Eigenwerte von  $\mathbf{F}_n^\nu(V)$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}(\mathbf{F}_n^\nu(V))_-^\gamma &= \gamma \int_0^\infty \text{Rang}(\mathbf{F}_n^\nu(V) + \tau)_- \tau^{\gamma-1} d\tau \\
 &\leq \gamma \int_0^\infty \text{Rang}(\mathbf{F}_n^\nu((V_+ - \tau)_+))_- \tau^{\gamma-1} d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.10.1}$$

Durch die Anwendung von (2.5.3) können wir die rechte Seite von (3.10.1) durch

$$\gamma C_n^{1/2, \Delta} (C_n^\nu)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \text{Sp}(V_+(\mathbf{x}) - \tau)_+^n \tau^{\gamma-1} d\tau d\mathbf{x} \tag{3.10.2}$$

abschätzen. Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  seien  $v_1(\mathbf{x}), \dots, v_N(\mathbf{x})$  die Eigenwerte von  $V_+(\mathbf{x})$ . Für die Berechnung der Spur in der Eigenbasis von  $V_+(\mathbf{x})$  erhalten wir für alle  $\tau \geq 0$

$$\text{Sp}(V_+(\mathbf{x}) - \tau)_+^n = \sum_{j=1}^N (v_j(\mathbf{x}) - \tau)_+^n. \tag{3.10.3}$$

Durch das Einsetzen von (3.10.3) in (3.10.2) und die Berechnung der Integrale im entstehenden Ausdruck erhalten wir (2.5.6).

Für  $\nu = (n-1)/2$  folgt die Ungleichung (2.5.6) aus (2.3.7) durch eine Rechnung, welche sich am Beweis von Satz 1.1 in [29] orientiert. Im Detail bedeutet dies, dass wir analog zum Beweis von Satz 2.5.2 verfahren, aber Satz 2.3.4 anstelle von Satz 2.3.1 verwenden. Mit dieser Strategie erhalten wir die Ungleichung

$$\text{Rang} \left( \mathbf{F}_n^\nu(V) + \tau \right)_- \leq \text{Rang} \left( (-\Delta)^{\lambda/2} - (K_n^\lambda)^{-1} a^{1-\lambda} (V_+ + (a^{-1} - \tau)) \right)_- \quad (3.10.4)$$

für alle  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\tau, a > 0$ . Nun wählen wir  $a := (\sigma\tau)^{-1}$  mit  $\sigma \in (0, 1)$  und schätzen die rechte Seite von (3.10.4) nach oben mit der Hilfe von (2.5.3) durch

$$C_n^{\lambda/2, \Delta} (K_n^\lambda)^{-2/\lambda} (\sigma\tau)^{n(\lambda-1)/\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \text{Sp} \left( V_+(\mathbf{x}) - (1 - \sigma)\tau \right)_+^{n/\lambda} d\mathbf{x}$$

ab. Setzt man dies nun in (3.10.1) ein und integriert anschließend in  $\tau$ , so erhält man für  $n/(n+\gamma) < \lambda < 1$

$$\text{Sp} \left( \mathbf{F}_n^\nu(V) \right)_-^\gamma \leq C_{n,\gamma}^{(n-1)/2, \text{LT}}(\lambda, \sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \text{Sp} \left( V_+(\mathbf{x}) \right)^{n+\gamma} d\mathbf{x}$$

mit

$$C_{n,\gamma}^{(n-1)/2, \text{LT}}(\lambda, \sigma) := \gamma C_n^{\lambda/2, \Delta} \frac{\Gamma(n + \gamma - \frac{n}{\lambda}) \Gamma(1 + \frac{n}{\lambda})}{(K_n^\lambda)^{\frac{n}{\lambda}} \Gamma(1 + n + \gamma)} \sigma^{n - \frac{n}{\lambda}} (1 - \sigma)^{-\gamma - n + \frac{n}{\lambda}}.$$

Zusammen mit

$$\begin{aligned} C_{n,\gamma}^{(n-1)/2, \text{LT}} &:= \min_{\substack{\lambda \in (n/(n+\gamma), 1) \\ \sigma \in (0, 1)}} C_{n,\gamma}^{(n-1)/2, \text{LT}}(\lambda, \sigma) \\ &= \min_{\lambda \in (n/(n+\gamma), 1)} C_{n,\gamma}^{(n-1)/2, \text{LT}} \left( \lambda, \frac{n(1-\lambda)}{\lambda\gamma} \right) \end{aligned}$$

folgt daraus (2.5.6).

### 3.11 Beweis von Satz 2.6.2

Unter den Annahmen von Teil (I) konstruieren wir in Abschnitt 3.11.2 mit der spektralen Darstellung von  $D_\theta^{\nu, \kappa}$  (siehe Abschnitt 3.11.1) eine Funktion aus  $P_{\theta,+}^{\nu, \kappa} \mathfrak{D}(|D_\theta^{\nu, \kappa}|^{1/2})$  so, dass der Erwartungswert von  $F_\theta^{\nu, \kappa}(Q)$  bezüglich dieser Funktion negativ ist. Nach dem Minimax-Prinzip impliziert dies Behauptung (I). Für den Beweis von Teil (II) wenden wir eine Version des

Birman-Schwinger-Prinzips (siehe Abschnitt 3.11.3) in Abschnitt 3.11.4 an. Eine Anwendung des Birman-Schwinger-Prinzips zum Beweis von Teil (III) wie in Abschnitt 3.11.4 liefert keine endliche obere Schranke. Deshalb betrachten wir nur beschränkte  $Q$  und können dadurch den Beitrag hoher Energien im Wesentlichen vernachlässigen (siehe Abschnitt 3.11.5). Als Konsequenz erhalten wir durch die Anwendung des Birman-Schwinger-Prinzips in Abschnitt 3.11.6 eine endliche obere Schranke.

### 3.11.1 Die spektrale Darstellung von $D_{\theta}^{\nu,\kappa}$

Wir beginnen mit dem Studium der klassischen Lösungen der Spektralgleichung

$$d^{\nu,\kappa} f = \lambda f \quad (3.11.1)$$

auf der Halbachse  $\mathbb{R}_+$ , wobei  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\overline{\mathbb{R}_+}$  der Spektralparameter ist.

**Lemma 3.11.1** (Lemma 2.1 in [52]). *Seien  $M$  und  $U$  die Kummer-Funktionen (siehe Abschnitt 13.2 in [55]). Für  $\lambda = 1$  ist jede klassische Lösung von (3.11.1) eine Linearkombination der folgenden linear unabhängigen Funktionen auf  $\mathbb{R}_+$ :*

(a) Für  $\nu^2 \neq \kappa^2 \neq 0$  und  $\Upsilon \neq -\kappa$

$$\begin{aligned} \Phi_M^{\nu,\kappa}(r) := & r^{\Upsilon} e^{-ir} \left( \Upsilon(\kappa + \Upsilon + i\nu) M(i\nu + \Upsilon, 2\Upsilon, 2ir) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + (\nu - i\Upsilon) M(1 + i\nu + \Upsilon, 1 + 2\Upsilon, 2ir) \begin{pmatrix} \nu \\ -\kappa - \Upsilon \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}(r) := & r^{\Upsilon} e^{-ir} \left( (\kappa + \Upsilon + i\nu) U(i\nu + \Upsilon, 2\Upsilon, 2ir) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + 2(i\Upsilon - \nu) U(1 + i\nu + \Upsilon, 1 + 2\Upsilon, 2ir) \begin{pmatrix} \nu \\ -\kappa - \Upsilon \end{pmatrix} \right); \end{aligned} \quad (3.11.2)$$

(b) Für  $\Upsilon = -\kappa \in \mathbb{R}_+$

$$\Phi_M^{\nu,\kappa}(r) := \Upsilon r^{\Upsilon} e^{-ir} \left( M(\Upsilon, 2\Upsilon, 2ir) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + M(1 + \Upsilon, 1 + 2\Upsilon, 2ir) \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}(r) := r^\Upsilon e^{-ir} \left( U(\Upsilon, 2\Upsilon, 2ir) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + U(1 + \Upsilon, 1 + 2\Upsilon, 2ir) \begin{pmatrix} 2i\Upsilon \\ 0 \end{pmatrix} \right); \quad (3.11.3)$$

(c) Für  $\nu^2 = \kappa^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \Phi_M^{\nu,\kappa}(r) := e^{-ir} & \left( M(1 + i\nu, 2, 2ir) \left( (\kappa + i\nu)r \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu \\ -\kappa \end{pmatrix} \right) \right. \\ & \left. + (\nu - i)r M(2 + i\nu, 3, 2ir) \begin{pmatrix} \nu \\ -\kappa \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}(r) := e^{-ir} & \left( U(1 + i\nu, 2, 2ir) \left( (\kappa + i\nu)r \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu \\ -\kappa \end{pmatrix} \right) \right. \\ & \left. + 2(i - \nu)r U(2 + i\nu, 3, 2ir) \begin{pmatrix} \nu \\ -\kappa \end{pmatrix} \right); \quad (3.11.4) \end{aligned}$$

(d) Für  $\kappa = 0$

$$\Phi_M^{\nu,0}(r) := r^{-i\nu} e^{-ir} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \Phi_U^{\nu,0}(r) := r^{i\nu} e^{ir} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (3.11.5)$$

Es ist vorteilhaft  $\tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}$  durch eine andere Lösung zu ersetzen:

Für  $0 < \Upsilon < 1/2$

$$\Phi_U^{\nu,\kappa}(r) := \frac{-2^{2\Upsilon-1} i e^{i\pi\Upsilon} \Gamma(\Upsilon + i\nu)}{\Gamma(2\Upsilon)} \left( \tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}(r) + \frac{2\Gamma(-2\Upsilon)}{\Gamma(1 - \Upsilon + i\nu)} \Phi_M^{\nu,\kappa}(r) \right); \quad (3.11.6)$$

für  $\Upsilon \geq 1/2$

$$\Phi_U^{\nu,\kappa}(r) := \frac{-2^{2\Upsilon-1} i e^{i\pi\Upsilon} \Gamma(\Upsilon + i\nu)}{\Gamma(2\Upsilon)} \tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}(r);$$

für  $\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$  und  $\kappa \neq 0$

$$\Phi_U^{\nu,\kappa}(r) := \frac{-2^{2\Upsilon-1} i \kappa (\kappa - \Upsilon) e^{i\pi\Upsilon} \Gamma(\Upsilon + i\nu)}{\nu \Gamma(2\Upsilon)} \left( \tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}(r) + \frac{2\Gamma(-2\Upsilon)}{\Gamma(1 - \Upsilon + i\nu)} \Phi_M^{\nu,\kappa}(r) \right); \quad (3.11.7)$$

und für  $\nu^2 = \kappa^2 \neq 0$

$$\Phi_U^{\nu, \kappa}(r) := \Gamma(i\nu) \tilde{\Phi}_U^{\nu, \kappa}(r) - \left( \ln 2 + 2\gamma + \psi(1 + i\nu) + \frac{i\pi}{2} + \frac{i}{2\nu} \right) \Phi_M^{\nu, \kappa}(r); \quad (3.11.8)$$

wobei  $\psi$  die Digamma-Funktion und  $\gamma$  die Euler-Mascheroni-Konstante ist. Die obigen Lösungen können eindeutig von  $\mathbb{R}_+$  auf  $\mathbb{C} \setminus i\overline{\mathbb{R}_+}$  analytisch fortgesetzt werden. Für ein beliebiges  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\overline{\mathbb{R}_+}$  ist jede klassische Lösung von (3.11.1) als Linearkombination von  $\Phi_M^{\nu, \kappa}(\lambda \cdot)$  und  $\Phi_U^{\nu, \kappa}(\lambda \cdot)$  gegeben.

*Beweis.* Auf der einen Seite kann die Gültigkeit von Lemma 3.11.1 durch eine Standardrechnung, welche Beziehungen zwischen den Kummer-Funktionen und ihren Ableitungen (siehe z. B. [55], 13.3.13–15, 13.3.22) verwendet, geprüft werden. Auf der anderen Seite ist eine Herleitung der Lösungen lehrreicher. Aus diesem Grund geben wir hier für  $\kappa \neq 0$  diese an.

Wir beginnen mit der Suche von Lösungen für (3.11.1) mit  $\lambda = 1$  in der Form

$$f(r) = r^\Upsilon F(r) \quad (3.11.9)$$

und erhalten

$$\begin{pmatrix} -\nu/r - 1 & -\frac{d}{dr} - \frac{\Upsilon + \kappa}{r} \\ \frac{d}{dr} + \frac{\Upsilon - \kappa}{r} & -\nu/r - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(r) \\ F_2(r) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.11.10)$$

Mit der Einführung von

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} := \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\kappa + \Upsilon}{2} F_1 + \frac{\nu}{2} F_2 \\ \frac{\nu}{2} F_1 - \frac{\kappa + \Upsilon}{2} F_2 \end{pmatrix} & \text{für } \Upsilon \neq \kappa \neq 0, \\ \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} & \text{für } \Upsilon = -\kappa \neq 0, \end{cases} \quad (3.11.11)$$

schlussfolgern wir, dass (3.11.10) äquivalent zu

$$G_2 = -G_1', \quad (3.11.12)$$

$$G_1''(r) + \frac{2\Upsilon}{r} G_1'(r) + \left( 1 + \frac{2\nu}{r} \right) G_1(r) = 0 \quad (3.11.13)$$

ist. Nun können wir zwei linear unabhängige Lösungen von (3.11.13), welche analytisch in  $\mathbb{C} \setminus i\overline{\mathbb{R}_+}$  sind, bestimmen.

Für  $\Upsilon \neq 0$  führen wir die Substitution

$$G_1(r) = e^{-ir} w(2ir), \quad z := 2ir \quad (3.11.14)$$

durch und erhalten

$$zw''(z) + (2\Upsilon - z)w'(z) - (i\nu + \Upsilon)w(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}_-},$$

was der Kummer-Gleichung mit den Parametern  $a := i\nu + \Upsilon$  und  $b := 2\Upsilon$  (siehe z. B. [55], 13.2.1) entspricht.

Für  $\Upsilon = 0$  liefert die Substitution

$$G_1(r) = re^{-ir}v(2ir), \quad z := 2ir \quad (3.11.15)$$

die Gleichung

$$zv''(z) + (2 - z)v'(z) - (1 + i\nu)v(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}_-},$$

d. h. die Kummer-Gleichung mit den Parametern  $a := 1 + i\nu$  und  $b := 2$ .

In beiden Fällen können die linear unabhängigen Lösungen der Kummer-Gleichung als  $M(a, b, z)$  und  $U(a, b, z)$  (siehe Abschnitt 13.2 in [55]) gewählt werden. Durch die Rücksubstitutionen in (3.11.14) (oder (3.11.15)), (3.11.12) (zusammen mit 13.3.15 und 13.3.22 in [55]), (3.11.11) und (3.11.9) erhalten wir (3.11.1) mit  $\lambda = 1$  analytisch in  $\mathbb{C} \setminus i\overline{\mathbb{R}_+}$ .  $\square$

**Lemma 3.11.2** (Lemma 2.2 in [52]). *Die Lösungen  $\Phi_M^{\nu, \kappa}$  und  $\Phi_U^{\nu, \kappa}$  haben die folgenden Asymptotiken bei null:*

$$\Phi_M^{\nu, \kappa}(r) = \begin{cases} \kappa r^\Upsilon \binom{\kappa + \Upsilon}{-\nu} + O(r^{1+\Upsilon}) & \text{falls } \nu^2 \neq \kappa^2 \neq 0 \text{ und } \kappa \neq -\Upsilon, \\ \Upsilon r^\Upsilon \binom{0}{1} + O(r^{1+\Upsilon}) & \text{falls } \Upsilon = -\kappa \in \mathbb{R}_+, \\ \binom{-\nu}{\kappa} + O(r) & \text{falls } \nu^2 = \kappa^2 \neq 0, \\ r^{-i\nu} \binom{1}{-i} + O(r) & \text{falls } \kappa = 0, \end{cases} \quad (3.11.16)$$

und

$$\Phi_U^{\nu, \kappa}(r) = \begin{cases} r^{-\Upsilon} \binom{\nu}{-\kappa - \Upsilon} + O(r^{1-\Upsilon}) & \text{falls } \Upsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1/2, -\kappa\}, \\ r^{-1/2} \binom{\nu}{-\kappa - 1/2} + O(r^{1/2} \ln r) & \text{falls } \Upsilon = 1/2 \neq -\kappa, \\ r^{-\Upsilon} \binom{1}{0} + O(r^{1-\Upsilon}) & \text{falls } \Upsilon = -\kappa \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1/2\}, \\ r^{-1/2} \binom{1}{0} + O(r^{1/2} \ln r) & \text{falls } \Upsilon = -\kappa = 1/2, \\ \kappa r^{-\Upsilon} \binom{\kappa - \Upsilon}{-\nu} + O(r) & \text{falls } \Upsilon \in i\mathbb{R}_+ \text{ und } \kappa \neq 0, \\ \ln r \binom{-\nu}{\kappa} - \frac{1}{2\kappa} \binom{\nu}{\kappa} + O(r \ln r) & \text{falls } \nu^2 = \kappa^2 \neq 0, \\ r^{i\nu} \binom{1}{i} + O(r) & \text{falls } \kappa = 0. \end{cases} \quad (3.11.17)$$

Für  $\Upsilon \in [0, 1/2)$  und  $\kappa \neq 0$  sind  $\Phi_M^{\nu, \kappa}$  und  $\Phi_U^{\nu, \kappa}$  reellwertig, für  $\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$  oder  $\kappa = 0$  sind sie komplex konjugiert zueinander.



*Beweis.* Die Asymptotik von  $\Phi_M^{\nu,\kappa}$  folgt direkt aus den Definitionen in Lemma 3.11.1 und 13.2.2 in [55].

Für  $\Upsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus (\mathbb{N}/2)$  oder  $\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$  und  $\kappa \neq 0$  folgt die Entwicklung von  $\tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}$  aus (3.11.2) oder (3.11.3) und 13.2.42 in [55]. Für  $\Upsilon \in (0, 1/2)$  und  $\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$  sind die Definitionen von (3.11.6) und (3.11.7) so gewählt, dass die Koeffizienten vor  $r^\Upsilon$  in der Asymptotik von (3.11.17) gleich null sind.

Für  $\Upsilon \in \mathbb{N}/2$  oder  $\Upsilon = 0$  und  $\kappa \neq 0$  folgt die Entwicklung von  $\tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}$  aus (3.11.2) oder (3.11.4) und 13.2.9 in [55]. In (3.11.8) ist die Linearkombination von  $\tilde{\Phi}_U^{\nu,\kappa}$  und  $\Phi_M^{\nu,\kappa}$  so gewählt, dass (3.11.17) gilt.

Da alle Einträge von (2.6.1) invariant unter komplexer Konjugation sind, folgt für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dass der Real- und Imaginärteil jeder Lösung von (3.11.1) wieder eine Lösung von (3.11.1) ist.

Für  $\Upsilon \in [0, 1/2)$  und  $\kappa \neq 0$  sind die Imaginärteile von  $\Phi_M^{\nu,\kappa}$  und  $\Phi_U^{\nu,\kappa}$  Lösungen von (3.11.1) mit  $\lambda = 1$  und daher Linearkombinationen von  $\Phi_M^{\nu,\kappa}$  und  $\Phi_U^{\nu,\kappa}$ . Nach (3.11.16) und (3.11.17) sind diese Imaginärteile von der Ordnung  $O(r^{1-\Upsilon})$  bei null und müssen daher verschwinden. Für  $\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$  oder  $\kappa = 0$  gilt analog, dass der Imaginärteil von  $\Phi_M^{\nu,\kappa} + \Phi_U^{\nu,\kappa}$  und der Realteil von  $\Phi_M^{\nu,\kappa} - \Phi_U^{\nu,\kappa}$  Lösungen von (3.11.1) mit  $\lambda = 1$  sind und daher Linearkombinationen von  $\Phi_M^{\nu,\kappa}$  und  $\Phi_U^{\nu,\kappa}$ . Nach (3.11.16) und (3.11.17) müssen diese Linearkombinationen aber von der Ordnung  $O(r)$  bei null sein und daher gleich der Nullfunktion. Deshalb muss  $\Phi_U^{\nu,\kappa} = \overline{\Phi_M^{\nu,\kappa}}$  gelten.  $\square$

Nun führen wir eine Lösung von (3.11.1) ein, welche quadratintegrabel bei unendlich ist.

**Lemma 3.11.3** (Lemma 2.3 in [52]). *Für  $\kappa \neq 0$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}_+)$  sei*

$$c^{\nu,\kappa}(\lambda) := \begin{cases} c_{+,\pm}^{\nu,\kappa} & \text{für } \pm \operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Im} \lambda > 0, \\ c_-^{\nu,\kappa} & \text{für } \operatorname{Im} \lambda < 0, \end{cases} \quad (3.11.18)$$

mit

$$c_-^{\nu,\kappa} := \begin{cases} \frac{i2^{2\Upsilon} \Gamma(\Upsilon + i\nu) e^{i\pi\Upsilon} \Gamma(-2\Upsilon)}{\Gamma(2\Upsilon) \Gamma(1 - \Upsilon + i\nu)} & \text{für } \Upsilon \in (0, 1/2), \\ 0 & \text{für } \Upsilon \geq 1/2, \\ \frac{i\kappa(\kappa - \Upsilon) 2^{2\Upsilon} \Gamma(\Upsilon + i\nu) \Gamma(-2\Upsilon) e^{i\pi\Upsilon}}{\nu \Gamma(2\Upsilon) \Gamma(1 - \Upsilon + i\nu)} & \text{für } \Upsilon \in i\mathbb{R}_+, \\ \ln 2 + 2\gamma + \psi(1 + i\nu) + \frac{i\pi}{2} + \frac{i}{2\nu} & \text{für } \Upsilon = 0, \end{cases} \quad (3.11.19)$$

und

$$c_{+,\pm}^{\nu,\kappa} := \begin{cases} \frac{i2^{2\Upsilon-1}|\Gamma(\Upsilon+i\nu)|^2 e^{\pm\pi\nu} e^{(1\mp 1)i\pi\Upsilon}}{\Upsilon\Gamma^2(2\Upsilon)} + \frac{i2^{2\Upsilon}\Gamma(\Upsilon+i\nu)e^{i\pi\Upsilon}\Gamma(-2\Upsilon)}{\Gamma(2\Upsilon)\Gamma(1-\Upsilon+i\nu)} & \text{für } \Upsilon \in (0, 1/2), \\ \frac{i2^{2\Upsilon-1}|\Gamma(\Upsilon+i\nu)|^2 e^{\pm\pi\nu} e^{(1\mp 1)i\pi\Upsilon}}{\Upsilon\Gamma^2(2\Upsilon)} & \text{für } \Upsilon \geq 1/2, \\ \frac{i\kappa(\kappa-\Upsilon)2^{2\Upsilon-1}\Gamma(\Upsilon+i\nu)e^{i\pi\Upsilon}}{\nu\Gamma(2\Upsilon)} \left( \frac{\Gamma(\Upsilon-i\nu)e^{\pm\pi\nu\mp i\pi\Upsilon}}{\Upsilon\Gamma(2\Upsilon)} + \frac{2\Gamma(-2\Upsilon)}{\Gamma(1-\Upsilon+i\nu)} \right) & \text{für } \Upsilon \in i\mathbb{R}_+, \\ \Gamma(1-i\nu)\Gamma(i\nu)e^{\pm\pi\nu} + \ln 2 + 2\gamma + \psi(1+i\nu) + \frac{i\pi}{2} + \frac{i}{2\nu} & \text{für } \Upsilon = 0. \end{cases} \quad (3.11.20)$$

Dann ist

$$\Phi_{\infty}^{\nu,\kappa}(\lambda; r) := \begin{cases} \Phi_U^{\nu,\kappa}(\lambda r) + c^{\nu,\kappa}(\lambda)\Phi_M^{\nu,\kappa}(\lambda r) & \text{für } \kappa \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}_+), \\ \Phi_U^{\nu,0}(\lambda r) & \text{für } \kappa = 0, \operatorname{Im} \lambda > 0, \operatorname{Re} \lambda \neq 0, \\ \Phi_M^{\nu,0}(\lambda r) & \text{für } \kappa = 0, \operatorname{Im} \lambda < 0, \end{cases} \quad (3.11.21)$$

die eindeutige (bis auf einen konstanten Vorfaktor) nicht triviale Lösung von (3.11.1), welche bei unendlich quadratintegabel ist.

*Beweis.* Für  $r \gg 1$ ,  $\arg \lambda \in (-3\pi/2, \pi/2)$ ,  $a \notin -\mathbb{N}_0$  und  $a - b \notin \mathbb{N}_0$  gelten nach 13.7.2 und 13.2.4 in [55] die Asymptotiken:

$$\begin{aligned} & M(a, b, 2i\lambda r) \\ &= (1 + O(r^{-1})) \begin{cases} \frac{\Gamma(b)e^{\pm i\pi a}(2i\lambda r)^{-a}}{\Gamma(b-a)} & \text{falls } \pm \operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Im} \lambda > 0, \\ \frac{\Gamma(b)e^{2i\lambda r}(2i\lambda r)^{a-b}}{\Gamma(a)} & \text{falls } \operatorname{Im} \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dazu sei noch angemerkt, dass die Fälle  $a \in -\mathbb{N}_0$  oder  $a - b \in \mathbb{N}_0$  für unsere Rechnung nicht relevant sind. Nach 13.7.3 in [55] gilt  $U(a, b, 2i\lambda r) = (2i\lambda r)^{-a}(1 + O(r^{-1}))$  für alle  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$  und  $r \gg 1$ . Diese Relationen erlauben uns die Berechnung der Asymptotik von  $\Phi_M^{\nu,\kappa}(\lambda \cdot)$  und  $\Phi_U^{\nu,\kappa}(\lambda \cdot)$  mit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}_+)$  für große positive Werte des Arguments. Da (2.6.1) im Grenzfunktfall bei unendlich ist (siehe Abschnitt 2.6.1), gibt es nach Satz 1.4 in [82] für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}_+)$  eine eindeutige (bis auf einen Vorfaktor) Lösung  $\Phi_{\infty}^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot)$  von (3.11.1), welche quadratintegabel bei unendlich ist. Für die

Konstruktion einer solchen Lösung genügt es daher eine nicht triviale Linearkombination von  $\Phi_M^{\nu,\kappa}(\lambda \cdot)$  und  $\Phi_U^{\nu,\kappa}(\lambda \cdot)$  zu finden, sodass der Koeffizient vor dem Term mit der nicht bei unendlich quadratintegrablen Asymptotik verschwindet. Die Koeffizienten in der Aussage des Lemmas sind so gewählt, dass diese Bedingung erfüllt ist.  $\square$

Nun bestimmen wir eine Lösung von (3.11.1), welche die Randbedingungen (2.6.4) oder (2.6.5) erfüllt.

**Lemma 3.11.4** (Lemma 2.4 in [52]). *Für  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$  ist jede Lösung von (3.11.1) mit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$ , welche die Randbedingungen (2.6.4) (für  $\Upsilon \in \overline{\mathbb{R}_+}$  und  $\kappa \neq 0$ ) oder (2.6.5) (für  $\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$  oder  $\kappa = 0$ ) erfüllt, proportional zu*

$$\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; r) := a_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda) \Phi_U^{\nu,\kappa}(\lambda r) + b_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda) \Phi_M^{\nu,\kappa}(\lambda r) \quad (3.11.22)$$

mit

$$a_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda) := \begin{cases} \lambda^\Upsilon \cos \theta & \text{für } \Upsilon \in \overline{\mathbb{R}_+} \text{ und } \kappa \neq 0, \\ \lambda^\Upsilon e^{i\theta} & \text{für } \Upsilon \in i\mathbb{R}_+ \text{ und } \kappa \neq 0, \\ \lambda^{-i\nu} e^{i\theta} & \text{für } \kappa = 0, \end{cases} \quad (3.11.23)$$

und

$$b_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda) := \begin{cases} \lambda^{-\Upsilon} \sin \theta & \text{für } \Upsilon \in \mathbb{R}_+, \\ \sin \theta - \cos \theta \ln \lambda & \text{für } \Upsilon = 0 \text{ und } \kappa \neq 0, \\ \lambda^{-\Upsilon} e^{-i\theta} & \text{für } \Upsilon \in i\mathbb{R}_+ \text{ und } \kappa \neq 0, \\ \lambda^{i\nu} e^{-i\theta} & \text{für } \kappa = 0. \end{cases} \quad (3.11.24)$$

Hier ist der analytische Zweig der Potenzen und des Logarithmus von  $\lambda$  durch die Konvention  $\arg \lambda \in (-3\pi/2, \pi/2)$  vorgegeben. Für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind beide Komponenten von  $\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}$  reellwertig.

*Beweis.* Die letzte Aussage von Lemma 3.11.1 besagt, dass jede Lösung von (3.11.1) eine Linearkombination von  $\Phi_U^{\nu,\kappa}(\lambda \cdot)$  und  $\Phi_M^{\nu,\kappa}(\lambda \cdot)$  ist. Für  $\Upsilon \geq 1/2$  (folglich  $\theta = \pi/2$ ) ist daher die einzige zulässige Lösung ein Vielfaches von  $\Phi_M^{\nu,\kappa}(\lambda \cdot)$ . Ansonsten erhalten wir die Aussage des Lemmas, indem wir die allgemeine Lösung in (2.6.4) beziehungsweise (2.6.5) einsetzen und die Asymptotiken (3.11.16), (3.11.17) und (2.6.2), (2.6.3) verwenden.  $\square$

**Lemma 3.11.5** (Lemma 2.5 in [52]). *Für jedes  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$  hat der Operator  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  keine Eigenwerte.*

*Beweis.* Angenommen  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist ein Eigenwert von  $D_\theta^{\nu, \kappa}$ . Dann muss die zugehörige Eigenfunktion eine Linearkombination von  $\Phi_M^{\nu, \kappa}(\lambda \cdot)$  und  $\Phi_U^{\nu, \kappa}(\lambda \cdot)$  nach Lemma 3.11.1 sein. Aber keine dieser Linearkombination, welche nicht trivial ist, kann quadratintegrabel sein. Dies kann man durch die Analyse der Asymptotiken bei unendlich, wie im Beweis von Lemma 3.11.3, sehen. Für  $\lambda = 0$  ist jede Lösung von (3.11.1) eine Linearkombination von (2.6.2) und (2.6.3), welche jeweils nicht quadratintegrabel bei unendlich sind.  $\square$

**Lemma 3.11.6** (Lemma 2.6 in [52]). *Sei  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$ . Für zwei beliebige Lösungen  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ ,  $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$  von (3.11.1) hängt die Funktion*

$$W[f, g](r) := f_1(r)g_2(r) - f_2(r)g_1(r) \quad (3.11.25)$$

*nicht von  $r \in \mathbb{R}_+$  ab. Außerdem gelten die Formeln*

$$W[\Phi_\infty^{\nu, \kappa}(\lambda; \cdot), \Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\lambda; \cdot)] = W[\Phi_M^{\nu, \kappa}, \Phi_U^{\nu, \kappa}] \begin{cases} c^{\nu, \kappa}(\lambda)a_\theta^{\nu, \kappa}(\lambda) - b_\theta^{\nu, \kappa}(\lambda) & \text{falls } \kappa \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}_+), \\ -b_\theta^{\nu, 0}(\lambda) & \text{falls } \kappa = 0, \operatorname{Im} \lambda > 0, \operatorname{Re} \lambda \neq 0, \\ a_\theta^{\nu, 0}(\lambda) & \text{falls } \kappa = 0, \operatorname{Im} \lambda < 0, \end{cases} \quad (3.11.26)$$

und

$$W[\Phi_M^{\nu, \kappa}, \Phi_U^{\nu, \kappa}] = \begin{cases} -2\Upsilon\kappa(\kappa + \Upsilon) & \text{falls } \Upsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus \{-\kappa\}, \\ -\Upsilon & \text{falls } \Upsilon = -\kappa \in \mathbb{R}_+, \\ \nu & \text{falls } \Upsilon = 0 \text{ und } \kappa \neq 0, \\ -2\kappa^2\nu\Upsilon & \text{falls } \Upsilon \in i\mathbb{R}_+ \text{ und } \kappa \neq 0, \\ 2i & \text{falls } \kappa = 0, \end{cases} \quad (3.11.27)$$

mit den Koeffizienten definiert in den Lemmata 3.11.3 und 3.11.4.

*Beweis.* Die Unabhängigkeit der Funktion (3.11.25) von  $r \in \mathbb{R}_+$  folgt aus (3.11.1) durch eine Standardrechnung. Daher impliziert die Analytizität von  $\Phi_M^{\nu, \kappa}$  und  $\Phi_U^{\nu, \kappa}$  in  $\mathbb{C} \setminus i\overline{\mathbb{R}_+}$ , dass die Funktion  $W[\Phi_M^{\nu, \kappa}, \Phi_U^{\nu, \kappa}]$  konstant in  $\mathbb{C} \setminus i\overline{\mathbb{R}_+}$  ist. Daher erhält man die Relation (3.11.26), indem man (3.11.21) und (3.11.22) in (3.11.25) einsetzt und anschließend vom entstehenden Ausdruck den Grenzwert  $r \rightarrow +0$  unter der Verwendung von Lemma 3.11.2 bildet.  $\square$

**Lemma 3.11.7** (Lemma 2.7 in [52]). *Sei  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$ . Für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}_+)$  ist  $G_\theta^{\nu, \kappa} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  die Greensche Funktion von  $D_\theta^{\nu, \kappa}$ , d. h. der*

Integralkern von  $(D_\theta^{\nu,\kappa} - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ , gegeben durch

$$G_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda; x, y) := \frac{1}{W[\Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot), \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot)]} \begin{cases} \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; x)(\Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; y))^\top & \text{für } x < y, \\ \Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; x)(\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; y))^\top & \text{für } x \geq y. \end{cases} \quad (3.11.28)$$

*Beweis.* Sei  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}_+)$  fest aber beliebig. Für  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  und  $x \in \mathbb{R}_+$  definieren wir

$$\begin{aligned} (R_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)f)(x) &:= \frac{\Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; x)}{W[\Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot), \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot)]} \int_0^x (\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; y))^\top f(y) dy \\ &\quad + \frac{\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; x)}{W[\Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot), \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot)]} \int_x^\infty (\Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; y))^\top f(y) dy. \end{aligned} \quad (3.11.29)$$

Da  $\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot) \in \mathbf{L}^2((0, x))$  und  $\Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot) \in \mathbf{L}^2((x, \infty))$  gilt, konvergieren die Integrale auf der rechten Seite von (3.11.29) und die Abbildung  $f \mapsto (R_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)f)(x)$  ist stetig auf  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$ . Außerdem stellen wir fest, dass für alle  $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  die Funktionen  $R_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)f$  im Definitionsbereich von  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  liegen und die Relation

$$(D_\theta^{\nu,\kappa} - \lambda \mathbb{I})R_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)f = f$$

erfüllen. Nun sei  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  beliebig und  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Funktionenfolge aus  $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$ , welche gegen  $f$  in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  konvergiert. Durch die Anwendung von (3.11.29) auf  $f_k$  mit anschließender Grenzwertbildung  $k \rightarrow \infty$  erkennen wir  $R_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} R_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)f$  punktweise in  $\mathbb{R}_+$ . Auf der anderen Seite folgt aus der Zugehörigkeit von  $\lambda$  zur Resolventenmenge von  $D_\theta^{\nu,\kappa}$ , dass

$$R_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)f_k = (D_\theta^{\nu,\kappa} - \lambda \mathbb{I})^{-1}f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} (D_\theta^{\nu,\kappa} - \lambda \mathbb{I})^{-1}f$$

gilt. Daraus folgt  $(D_\theta^{\nu,\kappa} - \lambda \mathbb{I})^{-1}f = R_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)f = \int_{\mathbb{R}_+} G_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot, y)f(y)dy$ .  $\square$

**Lemma 3.11.8** (Lemma 2.8 in [52]). *Für alle  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$  mit  $\kappa \neq 0$  sind die Funktionen*

$$(a) \ c_{+,\pm}^{\nu,\kappa} a_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot) - b_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot) \text{ auf } (\pm\mathbb{R}_+) + i\overline{\mathbb{R}_+},$$

$$(b) \ c_-^{\nu,\kappa} a_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot) - b_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot) \text{ auf } (\mathbb{R} - i\overline{\mathbb{R}_+}) \setminus \{0\}$$

*stetig und haben keine Nullstellen (siehe die Lemmata 3.11.3 und 3.11.4 für die Definitionen).*

*Beweis.* Mit der Hilfe von (3.11.23), (3.11.24) erkennen wir, dass die zu untersuchenden Funktionen in  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$  analytisch sind. Außerdem sind diese nach (3.11.18), (3.11.26) und (3.11.27) im Inneren von  $(\pm\mathbb{R}_+) + i\overline{\mathbb{R}_+}$  und  $(\mathbb{R} - i\overline{\mathbb{R}_+}) \setminus \{0\}$  proportional zu  $W[\Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot), \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot)]$ , wobei der Proportionalitätsfaktor nicht verschwindet. Aber dann können die Funktionen in diesen Gebieten nicht verschwinden, weil sonst  $\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot)$  zu  $\Phi_\infty^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot)$  proportional sein müsste und daher eine Eigenfunktion von  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  mit dem Eigenwert  $\lambda \notin \mathbb{R}$ .

Abschließend zeigen wir, dass die Funktionen für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  keine Nullstellen haben. Zunächst wiederholen wir, dass nach unserer in Lemma 3.11.4 getroffenen Konvention für jedes  $\gamma \in \mathbb{C}$

$$\lambda^\gamma = \begin{cases} |\lambda|^\gamma & \text{falls } \lambda > 0, \\ e^{-i\pi\gamma} |\lambda|^\gamma & \text{falls } \lambda < 0, \end{cases}$$

gilt.

Für  $\Upsilon \geq 1/2$  muss  $\theta = \pi/2$  gelten und die Behauptung folgt sofort.

Nun nehmen wir  $\Upsilon \in (0, 1/2)$  an. In diesem Fall genügt es

$$\operatorname{Im}(e^{(\pm 1 - 1)i\pi\Upsilon} c_{+,\pm}^{\nu,\kappa}) \neq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(e^{(\pm 1 - 1)i\pi\Upsilon} c_{-}^{\nu,\kappa}) \neq 0 \quad (3.11.30)$$

zu zeigen. Diese Relationen folgen aus (3.11.20), (3.11.19) und

$$\operatorname{Im} \left( \frac{i2^{2\Upsilon} \Gamma(\Upsilon + i\nu) e^{\pm i\pi\Upsilon} \Gamma(-2\Upsilon)}{\Gamma(2\Upsilon) \Gamma(1 - \Upsilon + i\nu)} \right) = - \frac{2^{2\Upsilon-1} |\Gamma(\Upsilon + i\nu)|^2 e^{\pm \pi\nu}}{2\Upsilon \Gamma^2(2\Upsilon)},$$

wobei die letzte Relation aus den Eigenschaften der Gammafunktion folgt (siehe 5.5.3 in [55]).

Für  $\Upsilon = 0$  genügt es die Relationen

$$\operatorname{Im} c_{+,\pm}^{\nu,\kappa} \neq \pi(1 \mp 1)/2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} c_{-}^{\nu,\kappa} \neq \pi(1 \mp 1)/2 \quad (3.11.31)$$

zu zeigen, welche aus (3.11.20), (3.11.19) und den Relationen (siehe 5.5.3 und 5.4.18 in [55])

$$\begin{aligned} \Gamma(1 - i\nu) \Gamma(i\nu) e^{\pm \pi\nu} &= -i\pi \coth(\pi\nu) \mp i\pi, \\ \operatorname{Im} \left( \psi(1 + i\nu) + \frac{i}{2\nu} \right) &= \frac{\pi}{2} \coth(\pi\nu) \end{aligned}$$

folgen.

Für  $\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$  folgt die Behauptung aus den Relationen

$$|c_{+,\pm}^{\nu,\kappa}| \neq e^{(1 \mp 1)\pi i\Upsilon} \quad \text{und} \quad |c_{-}^{\nu,\kappa}| \neq e^{(1 \mp 1)\pi i\Upsilon},$$

welche aus (3.11.20), (3.11.19) und

$$|c_{+,\pm}^{\nu,\kappa}|^2 = e^{(2\mp 4)\pi i \Upsilon} \frac{\sinh(\pi(\nu - i\Upsilon))}{\sinh(\pi(\nu + i\Upsilon))}, \quad |c_{-}^{\nu,\kappa}|^2 = e^{2\pi i \Upsilon} \frac{\sinh(\pi(\nu + i\Upsilon))}{\sinh(\pi(\nu - i\Upsilon))}$$

(siehe 5.4.3 in [55]) impliziert werden.  $\square$

**Lemma 3.11.9** (Lemma 2.9 in [52]). *Seien  $I$  und  $J$  kompakte Teilmengen von  $\mathbb{R}_+$  beziehungsweise  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann existiert für jedes  $x > 0$  eine Konstante  $C_{\theta,\pm}^{\nu,\kappa}(I, J; x) \in \mathbb{R}_+$ , sodass*

$$\sup_{(\lambda, y) \in (J \pm i(0,1]) \times I} \|G_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; x, y)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} \leq C_{\theta,\pm}^{\nu,\kappa}(I, J; x)$$

*gilt.*

*Beweis.* Die Funktionen  $\Phi_M^{\nu,\kappa}$  und  $\Phi_U^{\nu,\kappa}$  sind analytisch in  $\mathbb{C} \setminus i\overline{\mathbb{R}_+}$ . Nach (3.11.28), (3.11.26), (3.11.27) und den Lemmata 3.11.3, 3.11.4 und 3.11.8 hat daher die Funktion  $G_{\theta}^{\nu,\kappa}(\cdot; x, \cdot)$  für jedes  $x > 0$  eine eindeutige stetige Fortsetzung von  $(J \pm i(0,1]) \times I$  auf das Kompaktum  $(J \pm i[0,1]) \times I$ . Daraus folgt die Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Lemma 3.11.10** (Lemma 2.10 in [52]). *Wir betrachten die Abbildung  $E_{\theta}^{\nu,\kappa} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ,*

$$E_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; x, y) := \frac{1}{2\pi i} (G_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda + i0; x, y) - G_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda - i0; x, y)).$$

*Dann gilt*

$$E_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; x, y) = m_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda) \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; x) (\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; y))^{\top} \quad (3.11.32)$$

*mit*

$$m_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda) := \frac{(2\pi i W[\Phi_M^{\nu,\kappa}, \Phi_U^{\nu,\kappa}])^{-1} (c^{\nu,\kappa}(\lambda - i0) - c^{\nu,\kappa}(\lambda + i0))}{(c^{\nu,\kappa}(\lambda + i0) a_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda) - b_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda)) (c^{\nu,\kappa}(\lambda - i0) a_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda) - b_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda))} \quad (3.11.33)$$

*für  $\kappa \neq 0$  und*

$$m_{\theta}^{\nu,0}(\lambda) := (4\pi)^{-1}. \quad (3.11.34)$$

*Für ein beschränktes Intervall  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  bezeichnen wir mit  $P_{\mathcal{I}}(D_{\theta}^{\nu,\kappa})$  den Spektralprojektor von  $D_{\theta}^{\nu,\kappa}$  auf  $\mathcal{I}$ . Für alle  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  mit kompaktem Träger gilt*

$$P_{\mathcal{I}}(D_{\theta}^{\nu,\kappa})f = \int_{\mathcal{I}} \int_0^{\infty} E_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot, y) f(y) dy d\lambda. \quad (3.11.35)$$

*Beweis.* Die Formeln (3.11.32) und (3.11.33) folgen aus Lemma 3.11.7 zusammen mit (3.11.26), (3.11.22) und (3.11.21). Nach Lemma 3.11.5 hat  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  keine Eigenwerte. Daher erhalten wir für jedes  $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  mit kompaktem Träger nach der Formel von Stone (siehe z. B. Satz 4.3 in [72]) und Lemma 3.11.7

$$P_{\mathcal{I}}(D_\theta^{\nu,\kappa})f = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathcal{I}} \int_0^\infty \frac{G_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda + i\varepsilon; \cdot, y) - G_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda - i\varepsilon; \cdot, y)}{2\pi i} f(y) dy d\lambda.$$

Nach Lemma 3.11.9 und dem Satz von der majorisierenden Konvergenz können wir die Integration und die Grenzwertbildung vertauschen und so (3.11.35) schlussfolgern.  $\square$

Unter der Verwendung der Hilfsfunktionen und Konstanten, welche in den Lemmata 3.11.3, 3.11.4, 3.11.6 und 3.11.10 eingeführt wurden, sind wir nun in der Lage eine explizite Transformation anzugeben, welche die spektrale Darstellung von  $D_\theta^{\nu,\kappa}$  liefert.

**Satz 3.11.11** (Satz 2.11 in [52]). *Sei  $\Lambda$  der Multiplikationsoperator der unabhängigen Variable in  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}, dx)$ . Für  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}$  ist der Operator*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa} : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2, dr) &\rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}, dx), \\ \mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa} f &:= \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot)} \int_{1/R}^R (\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\cdot; y))^\top f(y) dy \end{aligned} \quad (3.11.36)$$

*wohldefiniert und unitär. Dieser Operator liefert die spektrale Darstellung von  $D_\theta^{\nu,\kappa}$ , d. h.*

$$D_\theta^{\nu,\kappa} = (\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa})^* \Lambda \mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa}. \quad (3.11.37)$$

*Beweis.* Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{E}_k := (-k, -k^{-1}) \cup (k^{-1}, k)$ . Für  $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  mit kompaktem Träger beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|P_{\mathcal{E}_k}(D_\theta^{\nu,\kappa})f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f, P_{\mathcal{E}_k}(D_\theta^{\nu,\kappa})f \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} \\ &= \left\| \sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot)} \int_0^\infty (\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\cdot; y))^\top f(y) dy \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})}^2 \end{aligned}$$

nach Lemma 3.11.5, Satz von Fubini, (3.11.35) und (3.11.32) gilt. Daher ist  $\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa}$  durch (3.11.36) wohldefiniert und isometrisch, d. h.  $(\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa})^* \mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa} = \mathbb{I}_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}$ .



Für jedes  $f \in \mathfrak{D}(D_\theta^{\nu,\kappa})$  liefert die partielle Integration mit der Hilfe von Satz 2.6.1 die Relation

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa} D_\theta^{\nu,\kappa} f &= \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot)} \int_{1/R}^R (\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\cdot; y))^T D_\theta^{\nu,\kappa} f(y) dy \right) \\ &= \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \left( (\cdot) \sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot)} \int_{1/R}^R (\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\cdot; y))^T f(y) dy \right) = \Lambda \mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa} f \end{aligned} \quad (3.11.38)$$

und folglich (3.11.37).

Als letzter Schritt ist daher die Surjektivität von  $\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa}$  zu zeigen. Wir bezeichnen mit  $P_\theta^{\nu,\kappa}$  den orthogonalen Projektor in  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  auf das Bild von  $\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa}$ . Wegen (3.11.38) ist der Operator

$$\Lambda_\theta^{\nu,\kappa} : \mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa} \mathfrak{D}(D_\theta^{\nu,\kappa}) \rightarrow P_\theta^{\nu,\kappa} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad \Lambda_\theta^{\nu,\kappa} g := \Lambda g$$

wohldefiniert und selbstadjungiert in  $P_\theta^{\nu,\kappa} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ . Da für jedes  $g \in \mathfrak{D}(\Lambda)$  und  $h \in \mathfrak{D}(\Lambda_\theta^{\nu,\kappa})$

$$\langle \Lambda_\theta^{\nu,\kappa} h, P_\theta^{\nu,\kappa} g \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})} = \langle h, \Lambda g \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})}$$

gilt, schlussfolgern wir die Inklusionen  $P_\theta^{\nu,\kappa} \mathfrak{D}(\Lambda) \subset \mathfrak{D}((\Lambda_\theta^{\nu,\kappa})^*) = \mathfrak{D}(\Lambda_\theta^{\nu,\kappa})$  und  $\Lambda P_\theta^{\nu,\kappa} \mathfrak{D}(\Lambda) \subset P_\theta^{\nu,\kappa} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , d. h., das Bild von  $\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa}$  ist ein reduzierender Teilraum für  $\Lambda$ . Daher existiert eine messbare Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , sodass

$$\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2) = \text{Bild}(\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \Omega}(\Lambda)) \quad (3.11.39)$$

gilt (kombiniere z. B. Korollar 4.6 und Satz 4.8 in [72]).

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass  $\Omega$  eine Lebesgue-Nullmenge ist. Falls dies nicht der Fall wäre, dann existiert ein  $\delta > 0$ , sodass  $\Omega \cap ([-\delta^{-1}, -\delta] \cup [\delta, \delta^{-1}])$  ein positives Lebesgue-Maß hat. Da  $\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\cdot; 1)$  analytisch in  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$  und reellwertig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist, hat die Menge

$$\Xi_0 := \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa})_1(\lambda; 1) = 0\}$$

Lebesgue-Maß null und daher besitzt wenigstens eine der Mengen

$$\Xi_\pm := \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \pm(\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa})_1(\lambda; 1) > 0\} \cap \Omega \cap ([-\delta^{-1}, -\delta] \cup [\delta, \delta^{-1}]) \quad (3.11.40)$$

ein positives Lebesgue-Maß. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass  $\Xi_+$  positives Lebesgue-Maß hat. Eine einfache Rechnung ergibt

$$(\mathcal{U}_\theta^{\nu,\kappa})^* g = \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot) g(\lambda) \sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)} d\lambda \quad (3.11.41)$$

für jedes  $g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ . Wählt man  $g := \mathbf{1}_{\Xi_+}$  und verwendet  $m_\theta^{\nu, \kappa}(\cdot) > 0$  so erhält man

$$((\mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa})^* \mathbf{1}_{\Xi_+})_1(1) > 0. \quad (3.11.42)$$

Nach dem Satz von der majorisierenden Konvergenz impliziert (3.11.41), dass die Abbildung  $r \mapsto ((\mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa})^* \mathbf{1}_{\Xi_+})_1(r)$  stetig in  $r = 1$  ist. Aus (3.11.42) folgt daher  $(\mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa})^* \mathbf{1}_{\Xi_+} \neq 0$  in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$ . Dies ist aber nicht möglich, da nach (3.11.40) und (3.11.39) die Relation  $\mathbf{1}_{\Xi_+} \in (\mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa} \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2))^\perp = \ker((\mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa})^*)$  gilt. Dieser Widerspruch impliziert, dass  $\Omega$  eine Lebesgue-Nullmenge ist und daher die rechte Seite von (3.11.39) mit  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  übereinstimmt.  $\square$

### 3.11.2 Zum Beweis von Satz 2.6.2 Teil (I)

Wir verwenden  $\psi_k := (\mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa})^*((\cdot)^{-1} \mathbf{1}_{[1/k^2, 1/k]}(\cdot))$  für  $k \in \mathbb{N}$  hinreichend groß als Testfunktion. Satz 3.11.11 impliziert  $\psi_k \in P_{\theta, +}^{\nu, \kappa} \mathfrak{D}(D_\theta^{\nu, \kappa}) \subset P_{\theta, +}^{\nu, \kappa} \mathfrak{D}(|D_\theta^{\nu, \kappa}|^{1/2})$  und

$$\begin{aligned} & \langle |D_\theta^{\nu, \kappa}|^{1/2} \psi_k, |D_\theta^{\nu, \kappa}|^{1/2} \psi_k \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} \\ &= \langle \mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa} \psi_k, (\mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa} D_\theta^{\nu, \kappa} (\mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa})^*) \mathcal{U}_\theta^{\nu, \kappa} \psi_k \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)} = \int_{1/k^2}^{1/k} \lambda^{-1} d\lambda = \ln k. \end{aligned} \quad (3.11.43)$$

Nach (3.11.41) gilt außerdem

$$\begin{aligned} \langle \psi_k, Q \psi_k \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} &= \int_0^\infty \int_{1/k^2}^{1/k} \int_{1/k^2}^{1/k} \frac{\sqrt{m_\theta^{\nu, \kappa}(\lambda)}}{\lambda} \frac{\sqrt{m_\theta^{\nu, \kappa}(\mu)}}{\mu} \\ &\quad \times \langle \Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\lambda; r), Q(r) \Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\mu; r) \rangle_{\mathbb{C}^2} d\mu d\lambda dr. \end{aligned} \quad (3.11.44)$$

Nach Lemma 3.11.4 sowie (3.11.16), (3.11.17) und der Beschränktheit von  $\Phi_U^{\nu, \kappa}$  und  $\Phi_M^{\nu, \kappa}$  auf  $[1, \infty)$  für alle  $\lambda, r \in \mathbb{R}_+$  (siehe Lemma 3.11.1 zusammen mit 13.7.2 und 13.7.3 in [55]) schlussfolgern wir, dass für

$$B_\theta^{\nu, \kappa}(\lambda; r) := \Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\lambda; r) - A_\theta^{\nu, \kappa}(r)$$

(hier ist  $A_\theta^{\nu, \kappa}$  in (2.6.7) definiert) die Ungleichung

$$\|B_\theta^{\nu, \kappa}(\lambda; r)\|_{\mathbb{C}^2} \leq C^{\nu, \kappa} \lambda r^{1-\operatorname{Re} \Upsilon} \quad (3.11.45)$$

mit einem endlichen  $C^{\nu, \kappa} > 0$  gilt. Daraus folgt mit  $Q = |Q|^{1/2}(\operatorname{sign} Q)|Q|^{1/2}$  und der Cauchy-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\lambda; r), Q(r) \Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\mu; r) \rangle_{\mathbb{C}^2} \right| \\ & \leq 2 \langle A_\theta^{\nu, \kappa}(r), |Q(r)| A_\theta^{\nu, \kappa}(r) \rangle_{\mathbb{C}^2} + (C^{\nu, \kappa})^2 (\lambda^2 + \mu^2) \|Q(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} r^{2-2\operatorname{Re} \Upsilon}, \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite in  $r$  über  $\mathbb{R}_+$  nach (2.6.35) integrierbar ist. Daher kann die Reihenfolge der Integration in (3.11.44) nach dem Satz von Fubini vertauscht werden. Aus der Schwarz-Ungleichung und (3.11.45) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \int_0^\infty \langle \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; r), Q(r) \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\mu; r) \rangle_{\mathbb{C}^2} dr \\
 &= \operatorname{Re} \langle |Q|^{1/2} (A_\theta^{\nu,\kappa} + B_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda; \cdot)), (\operatorname{sign} Q) |Q|^{1/2} (A_\theta^{\nu,\kappa} + B_\theta^{\nu,\kappa}(\mu; \cdot)) \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} \\
 &\geq \frac{1}{2} \int_0^\infty \langle A_\theta^{\nu,\kappa}(r), Q(r) A_\theta^{\nu,\kappa}(r) \rangle_{\mathbb{C}^2} dr \\
 &\quad - \left( \frac{\int_0^\infty \langle A_\theta^{\nu,\kappa}(r), |Q(r)| A_\theta^{\nu,\kappa}(r) \rangle_{\mathbb{C}^2} dr}{\int_0^\infty \langle A_\theta^{\nu,\kappa}(r), Q(r) A_\theta^{\nu,\kappa}(r) \rangle_{\mathbb{C}^2} dr} + \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad \times (C^{\nu,\kappa})^2 (\lambda^2 + \mu^2) \int_0^\infty \|Q(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} r^{2-2\operatorname{Re} \Upsilon} dr.
 \end{aligned} \tag{3.11.46}$$

Durch das Einsetzen von (3.11.46) in (3.11.44) schließen wir

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi_k, Q \psi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} \\
 &\geq \frac{1}{2} \int_0^\infty \langle A_\theta^{\nu,\kappa}(r), Q(r) A_\theta^{\nu,\kappa}(r) \rangle_{\mathbb{C}^2} dr \left( \int_{1/k^2}^{1/k} \frac{\sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)}}{\lambda} d\lambda \right)^2 \\
 &\quad - \left( \frac{2 \int_0^\infty \langle A_\theta^{\nu,\kappa}(r), |Q(r)| A_\theta^{\nu,\kappa}(r) \rangle_{\mathbb{C}^2} dr}{\int_0^\infty \langle A_\theta^{\nu,\kappa}(r), Q(r) A_\theta^{\nu,\kappa}(r) \rangle_{\mathbb{C}^2} dr} + 1 \right) (C^{\nu,\kappa})^2 \\
 &\quad \times \int_0^\infty \|Q(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} r^{2-2\operatorname{Re} \Upsilon} dr \left( \int_{1/k^2}^{1/k} \lambda \sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)} d\lambda \right) \left( \int_{1/k^2}^{1/k} \frac{\sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)}}{\lambda} d\lambda \right),
 \end{aligned} \tag{3.11.47}$$

wobei die rechte Seite für  $k$  hinreichend groß nach (2.6.35) und (2.6.9) positiv ist. Es folgt aus (3.11.33), (3.11.34), (3.11.27) und den Lemmata 3.11.3 und 3.11.4, dass ein  $h^{\nu,\kappa} > 0$  existiert, sodass für  $(\nu, \kappa, \theta) \in \mathfrak{M}_I$

$$m_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda) \geq h^{\nu,\kappa} \lambda^{-2\operatorname{Re} \Upsilon}$$

für alle  $\lambda > 0$  gilt. Dies impliziert

$$\int_{1/k^2}^{1/k} \frac{\sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda)}}{\lambda} d\lambda \geq h^{\nu,\kappa} \begin{cases} \ln k & \text{falls } \Upsilon \in \overline{i\mathbb{R}_+}, \\ \frac{k^{2\Upsilon} - k^\Upsilon}{\Upsilon} & \text{falls } \Upsilon \in (0, 1/2). \end{cases} \tag{3.11.48}$$

Nun implizieren (3.11.43), (3.11.47) und (3.11.48), dass die quadratische Form von  $F_\theta^{\nu,\kappa}(Q)$  berechnet auf  $\psi_k$  negativ für  $k$  hinreichend groß wird. Die Existenz des negativen Spektrums von  $F_\theta^{\nu,\kappa}(Q)$  folgt aus dem Minimax-Prinzip.

### 3.11.3 Eine Version des Birman-Schwinger-Prinzips

Seien  $E \in (0, \infty]$  und  $P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} := P_{[0,E)}(D_{\theta}^{\nu,\kappa})$  der Spektralprojektor von  $D_{\theta}^{\nu,\kappa}$  auf das Intervall  $[0, E)$ . Unter Hypothese 1 ist die quadratische Form

$$\mathbf{f}_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(Q)[\cdot] := \left\| |D_{\theta}^{\nu,\kappa}|^{1/2} \cdot \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 - \langle |Q|^{1/2} \cdot, (\text{sign } Q) |Q|^{1/2} \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} \quad (3.11.49)$$

auf  $P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} \mathfrak{D}(|D_{\theta}^{\nu,\kappa}|^{1/2})$  abgeschlossen und nach unten beschränkt. Wir definieren

$$F_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(Q) := P_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(D_{\theta}^{\nu,\kappa} - Q)P_{\theta,E}^{\nu,\kappa}$$

als den selbstadjungierten Operator in  $P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$ , welcher  $\mathbf{f}_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(Q)$  entspricht (siehe Satz X.17 in [58]).

Für  $\tau > 0$  impliziert Hypothese 1, dass der Birman-Schwinger-Operator

$$B_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(Q, \tau) := (D_{\theta}^{\nu,\kappa} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} + \tau \mathbb{I})^{-1/2} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} Q (D_{\theta}^{\nu,\kappa} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} + \tau \mathbb{I})^{-1/2} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} \quad (3.11.50)$$

in  $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  beschränkt ist.

Wir werden die folgende Version des Birman-Schwinger-Prinzips verwenden:

**Lemma 3.11.12** (Lemma 3.1 in [52]). *Die Gleichung*

$$\text{Rang } P_{(-\infty, -\tau)}(F_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(Q)) = \text{Rang } P_{(1, \infty)}(B_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(Q, \tau)) \quad (3.11.51)$$

*gilt für jedes  $\tau > 0$  mit  $B_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(Q, \tau)$  definiert in (3.11.50).*

*Beweis.* Für jedes  $\psi \in P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} \mathfrak{D}(|D_{\theta}^{\nu,\kappa}|^{1/2})$ ,  $\tau > 0$  gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(Q)[\psi] + \tau \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 \\ &= \langle (D_{\theta}^{\nu,\kappa} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} + \tau \mathbb{I})^{1/2} \psi, (\mathbb{I} - B_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(\tau)) (D_{\theta}^{\nu,\kappa} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} + \tau \mathbb{I})^{1/2} \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}. \end{aligned}$$

Die Identität (3.11.51) folgt nun aus dem Minimax-Prinzip.  $\square$

**Lemma 3.11.13** (Lemma 3.2 in [52]). *Für  $q \geq 1$  und  $\tau > 0$  gilt die Abschätzung*

$$\begin{aligned} & \text{Rang } P_{(-\infty, -\tau)}(F_{\theta,E}^{\nu,\kappa}(Q)) \\ & \leq \int_0^\infty \int_0^E m_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda) (\lambda + \tau)^{-q} \|Q_+^{q/2}(r) \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; r)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\lambda dr. \end{aligned} \quad (3.11.52)$$

*Falls das Integral auf der rechten Seite von (3.11.52) mit  $E := \infty$  endlich ist, dann ist Hypothese 1 für  $Q := Q_+$  erfüllt.*

*Beweis.* Für  $q \geq 1$  sei  $\mathfrak{N}^q$  die  $q$ -te Schatten-von-Neumann-Klasse kompakter Operatoren. Für alle selbstadjungierten, nichtnegativen Operatoren  $A$  und  $B$  mit  $A^q B^q \in \mathfrak{N}^2$  gilt  $AB \in \mathfrak{N}^{2q}$  und  $\|AB\|_{\mathfrak{N}^{2q}}^{2q} \leq \|A^q B^q\|_{\mathfrak{N}^2}^2$  (siehe Anhang B in [48]). Daraus folgt mit (3.11.41)

$$\begin{aligned}
 & \|Q_+^{1/2}(D_{\theta}^{\nu,\kappa} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} + \tau \mathbb{I})^{-1/2} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa}\|_{\mathfrak{N}^{2q}}^{2q} \\
 & \leq \|Q_+^{q/2}(\mathcal{U}_{\theta}^{\nu,\kappa})^* \mathcal{U}_{\theta}^{\nu,\kappa} (D_{\theta}^{\nu,\kappa} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} + \tau \mathbb{I})^{-q/2} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} (\mathcal{U}_{\theta}^{\nu,\kappa})^*\|_{\mathfrak{N}^2}^2 \\
 & = \|Q_+^{q/2}(\mathcal{U}_{\theta}^{\nu,\kappa})^* \mathbb{1}_{[0,E]}(\cdot)(\cdot + \tau)^{-q/2}\|_{\mathfrak{N}^2}^2 \\
 & = \int_0^\infty \int_0^E m_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda)(\lambda + \tau)^{-q} \|Q_+^{q/2}(r) \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; r)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\lambda dr.
 \end{aligned} \tag{3.11.53}$$

Durch die Abschätzung der rechten Seite von (3.11.51) nach oben durch

$$\begin{aligned}
 & \|(D_{\theta}^{\nu,\kappa} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} + \tau \mathbb{I})^{-1/2} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} Q_+ (D_{\theta}^{\nu,\kappa} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} + \tau \mathbb{I})^{-1/2} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa}\|_{\mathfrak{N}^q}^q \\
 & = \|Q_+^{1/2}(D_{\theta}^{\nu,\kappa} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa} + \tau \mathbb{I})^{-1/2} P_{\theta,E}^{\nu,\kappa}\|_{\mathfrak{N}^{2q}}^{2q}
 \end{aligned}$$

und die Anwendung von (3.11.53) schlussfolgern wir (3.11.52).

Falls das Integral auf der rechten Seite von (3.11.52) mit  $E := \infty$  endlich ist, dann impliziert (3.11.53), dass  $P_{\theta,+}^{\nu,\kappa} Q_+ P_{\theta,+}^{\nu,\kappa}$  eine kompakte Formstörung von  $D_{\theta}^{\nu,\kappa}$  in  $P_{\theta,+}^{\nu,\kappa} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$  ist. Nun folgt Hypothese 1 mit Standardargumenten.  $\square$

### 3.11.4 Zum Beweis von Satz 2.6.2 Teil (II)

Durch die Anwendung von Lemma 3.11.13 und die Grenzwertbildung  $\tau \rightarrow +0$  in (3.11.52) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \text{Rang } P_{(-\infty,0)}(F_{\theta}^{\nu,\kappa}(Q)) \\
 & \leq \int_0^\infty \|Q_+^q(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} \int_0^\infty \lambda^{-q} m_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda) \|\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; r)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\lambda dr.
 \end{aligned} \tag{3.11.54}$$

Im Fall  $\Upsilon \in (0, 1/2)$  und  $\theta \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$  reskalieren wir die Variable  $\mu := |\cot \theta|^{1/(2\Upsilon)} \lambda$  und erkennen

$$\int_0^\infty \lambda^{-q} m_{\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda) \|\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; r)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\lambda \tag{3.11.55}$$

$$= \frac{|\cot \theta|^{(q-2\Upsilon-1)/(2\Upsilon)}}{\sin^2 \theta} \int_0^\infty \mu^{-q+2\Upsilon} \tilde{m}_{\theta}^{\nu,\kappa}(\mu) \|\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(|\cot \theta|^{-1/(2\Upsilon)} \mu; r)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\mu, \tag{3.11.56}$$

wobei

$$\tilde{m}_\theta^{\nu,\kappa}(\mu) := \sin^2 \theta |\cot \theta| \mu^{-2\Upsilon} m_\theta^{\nu,\kappa}(|\cot \theta|^{-1/(2\Upsilon)} \mu)$$

die Ungleichung

$$|\tilde{m}_\theta^{\nu,\kappa}(\mu)| \leq C^{\nu,\kappa} \begin{cases} \mu^{-4\Upsilon} & \text{falls } \mu \geq 1, \\ 1 & \text{falls } \mu \leq 1, \end{cases} \quad (3.11.57)$$

mit einem  $C^{\nu,\kappa} > 0$  unabhängig von  $\theta$  (siehe (3.11.33), (3.11.23), (3.11.24), (3.11.18) und (3.11.30)) erfüllt. Nach Lemma 3.11.4 gilt

$$\|\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; r)\|_{\mathbb{C}_2}^2 \leq 2 \cos^2 \theta \lambda^{2\Upsilon} \|\Phi_U^{\nu,\kappa}(\lambda r)\|_{\mathbb{C}_2}^2 + 2 \sin^2 \theta \lambda^{-2\Upsilon} \|\Phi_M^{\nu,\kappa}(\lambda r)\|_{\mathbb{C}_2}^2. \quad (3.11.58)$$

Nach den Lemmata 3.11.1 und 3.11.2 existieren für  $\Upsilon > 0$  endliche Konstanten  $C_M^{\nu,\kappa}$  und  $C_U^{\nu,\kappa}$ , sodass für jedes  $x \in \mathbb{R}_+$  gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi_M^{\nu,\kappa}(x)\|_{\mathbb{C}_2}^2 &\leq C_M^{\nu,\kappa} \begin{cases} x^{2\Upsilon} & \text{falls } x \leq 1, \\ 1 & \text{falls } x \geq 1, \end{cases} \\ \|\Phi_U^{\nu,\kappa}(x)\|_{\mathbb{C}_2}^2 &\leq C_U^{\nu,\kappa} \begin{cases} x^{-2\Upsilon} & \text{falls } x \leq 1, \\ 1 & \text{falls } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11.59)$$

Durch das Einsetzen von (3.11.58) in (3.11.55) und die Verwendung der Abschätzungen (3.11.59) und (3.11.57) schlussfolgern wir (2.6.10).

Für  $\Upsilon > 0$  und  $\theta = \pi/2$  betrachten wir zunächst (3.11.54), führen anschließend die Reskalierung  $\lambda =: \mu/r$  durch und verwenden die Lemmata 3.11.4 und (3.11.33). Als Ergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned} &\text{Rang } P_{(-\infty,0)}(F_\theta^{\nu,\kappa}(Q)) \\ &\leq m_{\pi/2}^{\nu,\kappa}(1) \int_0^\infty \mu^{-q} \|\Phi_M^{\nu,\kappa}(\mu)\|_{\mathbb{C}_2}^2 d\mu \int_0^\infty \|Q_+^q(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} r^{q-1} dr, \end{aligned}$$

wobei das  $\mu$ -Integral nach (3.11.59) endlich ist.

### 3.11.5 Abschneiden der hohen Energien

Nun wenden wir uns dem Fall  $\Upsilon = 0$  zu. In diesem konvergiert das Integral auf der rechten Seite von (3.11.52) für  $E = \infty$  nicht. Um dieses Problem zu umgehen, benutzen wir:

**Lemma 3.11.14** (Lemma 3.3 in [52]). *Sei  $\|Q_+\|_\infty := \|Q_+\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{2 \times 2})}$  endlich. Für jedes  $\tau \geq 0$  gilt dann*

$$\text{Rang } P_{(-\infty, -\tau)}(F_\theta^{\nu, \kappa}(Q)) \leq \text{Rang } P_{(-\infty, -\tau)}\left(F_{\theta, 2\|Q_+\|_\infty}^{\nu, \kappa}(2Q_+)\right).$$

*Beweis.* Für jedes  $\psi \in P_{\theta, +}^{\nu, \kappa}(\mathfrak{D}(|D_\theta^{\nu, \kappa}|^{1/2}))$  sei  $\check{\psi} := P_{\theta, 2\|Q_+\|_\infty}^{\nu, \kappa}\psi$ ,  $\hat{\psi} := \psi - \check{\psi}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_\theta^{\nu, \kappa}(Q)[\psi] &\geq \mathfrak{f}_\theta^{\nu, \kappa}(Q_+)[\check{\psi}] + \mathfrak{f}_\theta^{\nu, \kappa}(Q_+)[\hat{\psi}] - 2 \operatorname{Re} \langle Q_+^{1/2} \check{\psi}, Q_+^{1/2} \hat{\psi} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} \\ &\geq \mathfrak{f}_{\theta, 2\|Q_+\|_\infty}^{\nu, \kappa}(2Q_+)[\check{\psi}] + \left( \| |D_\theta^{\nu, \kappa}|^{1/2} \hat{\psi} \|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 - 2 \| Q_+^{1/2} \hat{\psi} \|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.11.60)$$

aus (3.11.49). Da  $\| |D_\theta^{\nu, \kappa}|^{1/2} \hat{\psi} \|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 \geq 2\|Q_+\|_\infty \| \hat{\psi} \|_{L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2$  gilt, ist der Term in Klammern auf der rechten Seite von (3.11.60) nichtnegativ. Nun folgt die Behauptung aus dem Minimax-Prinzip.  $\square$

### 3.11.6 Zum Beweis von Satz 2.6.2 Teil (III)

Aus der Kombination von Lemma 3.11.14 mit Lemma 3.11.13 (schicke  $\tau \rightarrow +0$  und setze  $q := 1$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\text{Rang } P_{(-\infty, 0)}(F_\theta^{\nu, \kappa}(Q)) \\ &\leq \int_0^\infty \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} \int_0^{2\|Q_+\|_\infty} \lambda^{-1} m_\theta^{\nu, \kappa}(\lambda) \|\Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\lambda; r)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\lambda dr. \end{aligned} \quad (3.11.61)$$

Durch das Einsetzen der Definitionen (3.11.33), (3.11.22), (3.11.23), (3.11.24) und das Durchführen der Reskalierung  $\lambda =: e^{\tan \theta} \mu$  können wir das innere Integral auf der rechten Seite von (3.11.61) als

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\|Q_+\|_\infty} \lambda^{-1} m_\theta^{\nu, \kappa}(\lambda) \|\Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\lambda; r)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\lambda \\ &= \int_0^{2\|Q_+\|_\infty e^{-\tan \theta}} \mu^{-1} m_0^{\nu, \kappa}(\mu) \|f^{\nu, \kappa}(\mu e^{\tan \theta} r) + g^{\nu, \kappa}(\mu; e^{\tan \theta} r)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\mu \end{aligned} \quad (3.11.62)$$

mit  $f^{\nu, \kappa} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}^2$  und  $g^{\nu, \kappa} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  gegeben durch

$$f^{\nu, \kappa}(x) := \Phi_U^{\nu, \kappa}(x) - \ln(x) \Phi_M^{\nu, \kappa}(x), \quad g^{\nu, \kappa}(\zeta, x) := \ln(x) \Phi_M^{\nu, \kappa}(\zeta x)$$

umschreiben. Lemma 3.11.2 und die Beschränktheit von  $\Phi_U^{\nu, \kappa}$  auf  $[1, \infty)$  und  $\Phi_M^{\nu, \kappa}$  auf  $\mathbb{R}_+$  implizieren die Abschätzungen

$$\|f^{\nu, \kappa}(\cdot)\|_{\mathbb{C}^2}^2 \leq C_f^{\nu, \kappa} \ln^2(e + \cdot), \quad \|g^{\nu, \kappa}(\zeta, \cdot)\|_{\mathbb{C}^2}^2 \leq C_g^{\nu, \kappa} \ln^2(\cdot)$$

mit endlichen Konstanten  $C_f^{\nu,\kappa}$  und  $C_g^{\nu,\kappa}$  unabhängig von  $\zeta$ . Außerdem implizieren (3.11.33) und (3.11.31) die Schranke

$$m_0^{\nu,\kappa}(\cdot) \leq C_m^{\nu,\kappa} (1 + \ln^2(\cdot))^{-1}.$$

Durch die Anwendung der obigen Abschätzungen auf die rechte Seite von (3.11.62) und die Verwendung der Monotonie des Logarithmus schlussfolgern wir

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\|Q_+\|_\infty} \lambda^{-1} m_\theta^{\nu,\kappa}(\lambda) \|\Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\lambda; r)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d\lambda \\ & \leq 2C_m^{\nu,\kappa} \left( C_f^{\nu,\kappa} \ln^2(e + 2\|Q_+\|_\infty r) + C_g^{\nu,\kappa} \ln^2(e^{\tan \theta} r) \right) \int_0^{2\|Q_+\|_\infty e^{-\tan \theta}} \frac{d\mu}{\mu(1 + \ln^2 \mu)}, \end{aligned}$$

wobei das Integral auf der rechten Seite durch  $\pi$  nach oben abgeschätzt werden kann. Durch das Einsetzen dieser Abschätzung in (3.11.61) schlussfolgern wir (2.6.12).

### 3.12 Beweis von Satz 2.6.3

Durch die Anwendung einer Version des Birman-Schwinger-Prinzips (siehe Abschnitt 3.11.3) können wir in Abschnitt 3.12.1 eine Ungleichung vom Typ Cwikel-Lieb-Rozenblum beweisen. Mit Standardargumenten (siehe z. B. den Beweis von Satz 1.1 in [29]) können wir daraus in den Abschnitten 3.12.2 und 3.12.3 eine Ungleichung vom Typ Lieb-Thirring schlussfolgern.

#### 3.12.1 Anwendung des Birman-Schwinger-Prinzips

**Lemma 3.12.1** (Lemma 4.1 in [52]). *Für  $\tau > 0$ ,  $q > 1$  und die Kombinationen von  $\nu, \kappa \in \mathbb{R}$  und  $\theta \in [0, \pi)$ , welche in (2.6.13) behandelt werden, existiert eine Konstante  $k^{\nu,\kappa} > 0$ , sodass*

$$\text{Rang } P_{(-\infty, -\tau)}(F_\theta^{\nu,\kappa}(Q)) \leq \frac{\tau^{1-q}}{q-1} k^{\nu,\kappa} \int_0^\infty \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}^q W_\theta^{\nu,\kappa}(r) dr$$

*gilt.*

*Beweis.* Lemma 3.11.13 impliziert, dass

$$\begin{aligned} & \text{Rang } P_{(-\infty, -\tau)}(F_\theta^{\nu,\kappa}(Q)) \\ & \leq \frac{\tau^{1-q}}{q-1} \int_0^\infty \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}^q \left\| \sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot)} \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\cdot; r) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 dr \end{aligned}$$



für alle  $q > 1$  gilt. Deshalb müssen wir nur noch die Abschätzung

$$\left\| \sqrt{m_{\theta}^{\nu, \kappa}(\cdot)} \Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\cdot; r) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 \leq k^{\nu, \kappa} W_{\theta}^{\nu, \kappa}(r) \quad (3.12.1)$$

für alle  $r > 0$  mit endlichen  $k^{\nu, \kappa} > 0$  und  $W_{\theta}^{\nu, \kappa}$  definiert in (2.6.13) zeigen.

*Fall  $\nu^2 = \kappa^2 \neq 0$  und  $\theta = \pi/2$ :* Nach (3.11.33) und Lemma 3.11.4 gilt  $m_{\pi/2}^{\nu, \kappa}(\lambda) = m_{\pi/2}^{\nu, \kappa}(1)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Daraus folgt (3.12.1), da

$$\left\| \Phi_{0, \pi/2}^{\nu, \kappa}(\cdot; r) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} = \left\| \Phi_M^{\nu, \kappa}(\cdot; r) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} = \left\| \Phi_M^{\nu, \kappa} \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} < \infty$$

für alle  $r > 0$  gilt.

*Fall  $\kappa \neq 0$ ,  $\Upsilon \in i\mathbb{R}_+$  und  $\theta \in [0, \pi)$ :* Eine Rechnung, welche die Formel 5.4.3 in [55] verwendet, ergibt für  $\Upsilon \in \mathbb{R}_+$

$$c_{+, +}^{\nu, \kappa} \cdot \overline{c_{-, +}^{\nu, \kappa}} = 1 \quad \text{und} \quad c_{+, +}^{\nu, \kappa} (c_{-, +}^{\nu, \kappa})^{-1} \geq 1 \quad \text{für } \nu \geq 0,$$

wobei die Koeffizienten in (3.11.20), (3.11.19) eingeführt wurden. Daher existiert ein  $\rho \in (1, \infty)$  und ein  $\omega \in [0, 2\pi)$ , welches nur von  $\kappa$  und  $\nu$  abhängt, sodass

$$c_{+, +}^{\nu, \kappa} = \rho^{\text{sign } \nu} e^{i\omega} \quad \text{und} \quad c_{-, +}^{\nu, \kappa} = \rho^{-\text{sign } \nu} e^{i\omega}$$

gilt. Durch das Einsetzen dieser Relationen in (3.11.33) erhalten wir durch die Anwendung von (3.11.18), (3.11.27), (3.11.23) und (3.11.24) die Ungleichung

$$\begin{aligned} m_{\theta}^{\nu, \kappa}(\lambda) &= \frac{1}{4\pi\kappa^2|\nu||\Upsilon|} \cdot \frac{\rho - \rho^{-1}}{\rho + \rho^{-1} - 2\cos(\omega + 2\theta + 2|\Upsilon|\ln\lambda)} \\ &\leq \frac{1}{4\pi\kappa^2|\Upsilon\nu|} \cdot \frac{\rho - \rho^{-1}}{\rho + \rho^{-1} - 2} = \frac{1}{4\pi\kappa^2|\Upsilon\nu|} \cdot \frac{\rho + 1}{\rho - 1}. \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\begin{aligned} \left\| \Phi_{0, \theta}^{\nu, \kappa}(\cdot; r) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} &= \left\| 2\text{Re}((\cdot)^{-\Upsilon} e^{-i\theta} \Phi_M^{\nu, \kappa}(\cdot; r)) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} \\ &\leq 2 \left\| \Phi_M^{\nu, \kappa} \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)} < \infty \end{aligned}$$

ergibt dies (3.12.1).

*Fall  $\kappa = 0$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$  und  $\theta \in [0, \pi)$ :* Hier folgt (3.12.1) sofort aus (3.11.34), Lemma 3.11.4 und (3.11.5).

*Fall  $\nu^2 = \kappa^2 \neq 0$  und  $\theta \in [0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$ :* Die linke Seite von (3.12.1) stimmt mit  $Z_0^{\nu, \kappa}(e^{\tan\theta} r)$  überein, wobei  $Z_0^{\nu, \kappa} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ist durch

$$Z_0^{\nu, \kappa}(x) := \sup_{\zeta \in \mathbb{R}_+} \frac{|c_- - c_{+, +}| \left\| \Phi_U^{\nu, \kappa}(\zeta x) - (\ln \zeta) \Phi_M^{\nu, \kappa}(\zeta x) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2}{|2\pi\nu(c_{+, +}^{\nu, \kappa} + \ln \zeta)(c_{-, +}^{\nu, \kappa} + \ln \zeta)|}. \quad (3.12.2)$$

Nach Lemma 3.11.8 gilt die Abschätzung

$$\frac{|c_- - c_{+,+}|}{|2\pi\nu(c_{+,+}^{\nu,\kappa} + \ln \zeta)(c_-^{\nu,\kappa} + \ln \zeta)|} \leq \frac{K^{\nu,\kappa}}{1 + \ln^2 \zeta} \quad (3.12.3)$$

mit  $K^{\nu,\kappa} \in \mathbb{R}_+$ . Auf der anderen Seite implizieren Lemma 3.11.2 und die Beschränktheit von  $\Phi_U^{\nu,\kappa}$  und  $\Phi_M^{\nu,\kappa}$  auf  $(1, \infty)$  die Ungleichung

$$\|\Phi_U^{\nu,\kappa}(\zeta x) - (\ln \zeta)\Phi_M^{\nu,\kappa}(\zeta x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 \leq L^{\nu,\kappa} \begin{cases} 1 + \ln^2 x & \text{falls } \zeta \leq x^{-1}, \\ 1 + \ln^2 \zeta & \text{falls } \zeta \geq x^{-1}, \end{cases} \quad (3.12.4)$$

mit einem endlichen  $L^{\nu,\kappa}$ . Durch das Einsetzen von (3.12.3) und (3.12.4) in (3.12.2) erhalten wir (3.12.1).

*Fall  $\Upsilon \in (0, 1/2)$  und  $\theta \in (0, \pi)$  oder  $\Upsilon \geq 1/2$  und  $\theta = \pi/2$ :* Für  $\theta = \pi/2$  ist die linke Seite von (3.12.1) durch  $m_{\pi/2}^{\nu,\kappa}(1)\|\Phi_M^{\nu,\kappa}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2$  gegeben und die Behauptung offensichtlich. Aus (3.11.33), (3.11.27) und Lemma 3.11.4 erhalten wir

$$\left\| \sqrt{m_\theta^{\nu,\kappa}(\cdot)} \Phi_{0,\theta}^{\nu,\kappa}(\cdot; r) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)}^2 = Z_{\text{sign}(\tan \theta)}^{\nu,\kappa}(|\tan \theta|^{1/(2\Upsilon)} r), \quad (3.12.5)$$

wobei  $Z_\pm^{\nu,\kappa} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ist durch

$$Z_\pm^{\nu,\kappa}(x) := \sup_{\zeta \in \mathbb{R}_+} \frac{|c_- - c_{+,+}| \|\zeta \Phi_U^{\nu,\kappa}(\zeta^{1/(2\Upsilon)} x) \pm \Phi_M^{\nu,\kappa}(\zeta^{1/(2\Upsilon)} x)\|_{\mathbb{C}^2}^2}{|2\pi W[\Phi_M^{\nu,\kappa}, \Phi_U^{\nu,\kappa}](c_{+,+}^{\nu,\kappa} \zeta \mp 1)(c_-^{\nu,\kappa} \zeta \mp 1)|}. \quad (3.12.6)$$

Aus (3.11.27) und (3.11.30) erhalten wir die Abschätzung

$$\frac{|c_- - c_{+,+}|}{|2\pi W[\Phi_M^{\nu,\kappa}, \Phi_U^{\nu,\kappa}](c_{+,+}^{\nu,\kappa} \zeta \mp 1)(c_-^{\nu,\kappa} \zeta \mp 1)|} \leq \frac{X^{\nu,\kappa}}{1 + \zeta^2} \quad (3.12.7)$$

mit einem endlichen  $X^{\nu,\kappa}$ . Auf der anderen Seite impliziert (3.11.59)

$$\begin{aligned} & \|\zeta \Phi_U^{\nu,\kappa}(\zeta^{1/(2\Upsilon)} x) \pm \Phi_M^{\nu,\kappa}(\zeta^{1/(2\Upsilon)} x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 \\ & \leq Y^{\nu,\kappa} \begin{cases} \zeta(x^{-2\Upsilon} + x^{2\Upsilon}) & \text{falls } \zeta \leq x^{-2\Upsilon}, \\ 1 + \zeta^2 & \text{falls } \zeta \geq x^{-2\Upsilon}, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12.8)$$

mit einem endlichen  $Y^{\nu,\kappa}$ . Nun setzen wir (3.12.7) und (3.12.8) in (3.12.6) ein und erhalten

$$\begin{aligned} Z_\pm^{\nu,\kappa}(x) & \leq X^{\nu,\kappa} Y^{\nu,\kappa} \max \left\{ 1, (x^{-2\Upsilon} + x^{2\Upsilon}) \sup_{\zeta \leq x^{-2\Upsilon}} \frac{\zeta}{1 + \zeta^2} \right\} \\ & \leq X^{\nu,\kappa} Y^{\nu,\kappa} \max \{1, x^{-2\Upsilon}\}. \end{aligned}$$

Dies setzen wir in (3.12.5) ein und schlussfolgern (3.12.1). □

### 3.12.2 Zum Beweis von Satz 2.6.3 Teil (a)

Sei  $q \in (1, 1 + \gamma)$ . Aus dem Minimax-Prinzip folgt

$$\begin{aligned} \text{Sp} (F_{\theta}^{\nu, \kappa}(Q)_-^{\gamma}) &= \int_0^{\infty} \gamma \tau^{\gamma-1} \text{Rang } P_{(-\infty, -\tau)}(F_{\theta}^{\nu, \kappa}(Q)) d\tau \\ &\leq \int_0^{\infty} \gamma \tau^{\gamma-1} \text{Rang } P_{(-\infty, -\tau/2)}(F_{\theta}^{\nu, \kappa}((Q_+ - \tau/2)_+)) d\tau \\ &\leq \frac{\gamma k^{\nu, \kappa}}{q-1} \int_0^{\infty} W_{\theta}^{\nu, \kappa}(r) \int_0^{\infty} \tau^{\gamma-1} \|(Q_+(r) - \tau/2)_+\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}^q (\tau/2)^{1-q} d\tau dr. \end{aligned} \quad (3.12.9)$$

Durch den Übergang zur neuen Integrationsvariablen  $\sigma := \tau \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}^{-1}/2$  im inneren Integral können wir die rechte Seite von (3.12.9) zu

$$2^{\gamma} \gamma k^{\nu, \kappa} \left( \frac{1}{q-1} \int_0^1 (1-\sigma)^q \sigma^{\gamma-q} d\sigma \right) \int_0^{\infty} \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}^{1+\gamma} W_{\theta}^{\nu, \kappa}(r) dr$$

umformen. Durch das Minimieren in  $q \in (1, 1 + \gamma)$  erhalten wir (2.6.14).

### 3.12.3 Zum Beweis von Satz 2.6.3 Teil (b)

Sei  $q \in (1, 1 + \gamma - 2\Upsilon)$ . Aus der Anwendung von Lemma 3.11.13, des Minimax-Prinzips, (3.11.33) und Lemma 3.11.4 schlussfolgern wir

$$\begin{aligned} \text{Sp} (F_0^{\nu, \kappa}(Q)_-^{\gamma}) &= \int_0^{\infty} \gamma \tau^{\gamma-1} \text{Rang } P_{(-\infty, -\tau)}(F_0^{\nu, \kappa}(Q)) d\tau \\ &\leq \int_0^{\infty} \gamma \tau^{\gamma-1} \text{Rang } P_{(-\infty, -\tau/2)}(F_0^{\nu, \kappa}((Q_+ - \tau/2)_+)) d\tau \\ &\leq \int_0^{\infty} \int_0^{2\|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}}} \gamma \tau^{\gamma-1} m_0^{\nu, \kappa}(1) \\ &\quad \times \left( \|Q_+(r)\|_{\mathbb{C}^{2 \times 2}} - \frac{\tau}{2} \right)^q \left( \frac{\tau}{2} \right)^{1-q} \Omega_q^{\nu, \kappa} \left( \frac{\tau r}{2} \right) d\tau dr \end{aligned} \quad (3.12.10)$$

mit  $\Omega_q^{\nu, \kappa} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\Omega_q^{\nu, \kappa}(x) := \int_0^{\infty} \frac{\|\Phi_U^{\nu, \kappa}(\lambda x)\|_{\mathbb{C}^2}^2}{(1+\lambda)^q} d\lambda.$$

Durch den Gebrauch von (3.11.59) schließen wir auf die Existenz von  $H_q^{\nu, \kappa} \in \mathbb{R}_+$ , sodass

$$\Omega_q^{\nu, \kappa} \leq H_q^{\nu, \kappa} ((\cdot)^{-2\Upsilon} + 1)$$

gilt. Durch das Einsetzen dieser Ungleichung in (3.12.10), anschließender Berechnung des inneren Integrals sowie der Minimierung des erhaltenen Ausdrucks über  $q \in (1, 1 + \gamma - 2\Upsilon)$  erhalten wir (2.6.15).

### 3.13 Beweis von Satz 2.6.4

Nach (2.6.30) gilt für  $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu(\alpha V) &\geq \mathbf{F}_{\boldsymbol{\theta}_n}^\nu\left(\alpha R(|\cdot|)\mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}\right) \\ &= (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} F_{\boldsymbol{\theta}_n(j)}^{\nu, \kappa_j}(\alpha R \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}) \right) (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n). \end{aligned} \quad (3.13.1)$$

Es genügt daher zu zeigen, dass ein  $\alpha_c \in (0, \infty)$  existiert, sodass  $F_{\boldsymbol{\theta}_n(j)}^{\nu, \kappa_j}(\alpha R \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  kein negatives Spektrum für alle  $j \in \mathfrak{T}_n$  hat.

Für alle  $j \in \mathfrak{T}_n$  mit  $\kappa_j^2 \leq \nu^2 + 1/4$  implizieren die Annahmen (i) oder (ii) und Satz 2.6.2 Teil (II) oder (III) die Existenz von  $\alpha_j > 0$ , sodass

$$F_{\boldsymbol{\theta}_n(j)}^{\nu, \kappa_j}(\alpha R \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}) \geq 0 \quad (3.13.2)$$

für alle  $\alpha \in [0, \alpha_j)$  gilt.

Nach den Annahmen im Satz existieren  $R_1 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, r dr)$  und  $R_2 \in \mathbf{L}^n(\mathbb{R}_+, r^{n-1} dr)$ , sodass  $R = R_1 + R_2$  gilt. Zusätzlich gilt

$$F_{\boldsymbol{\theta}_n(j)}^{\nu, \kappa_j}(\alpha R \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}) = \frac{1}{2} (F_{\boldsymbol{\theta}_n(j)}^{\nu, \kappa_j}(2\alpha R_1 \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}) + F_{\boldsymbol{\theta}_n(j)}^{\nu, \kappa_j}(2\alpha R_2 \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})) \quad (3.13.3)$$

für alle  $j \in \mathfrak{T}_n$ . Satz 2.5 in [39] impliziert

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} |D_{\pi/2}^{0, \kappa_j}| \right) \mathcal{A}_n \mathcal{S}_n &= (-\Delta)^{1/2} \\ &\geq \tilde{K}_n |\cdot|^{-1} = (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \left( \bigoplus_{j \in \mathfrak{T}_n} \tilde{K}_n / (\cdot) \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N} \right) \mathcal{A}_n \mathcal{S}_n \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{K}_n := 2 \frac{\Gamma^2((n+1)/4)}{\Gamma^2((n-1)/4)}.$$

Daraus schlussfolgern wir

$$|D_{\pi/2}^{0, \kappa_j}| \geq \tilde{K}_n / (\cdot) \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N} \quad \text{für alle } j \in \mathfrak{T}_n. \quad (3.13.4)$$

Nun betrachten wir alle  $j \in \mathfrak{T}_n$  mit  $\kappa_j^2 > \nu^2 + 1/4$ . Dann gilt  $\boldsymbol{\theta}_n(j) = \pi/2$  nach (2.6.26). Dies zusammen mit Lemma 3.5.23 (spezielle Notation in diesem Abschnitt  $D_{\pi/2}^{\nu, k} = D^{\nu, k}$ ) und (3.13.4) impliziert

$$|D_{\boldsymbol{\theta}_n(j)}^{\nu, \kappa_j}| \geq \sqrt{K_n^\nu} \tilde{K}_n / (\cdot) \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}.$$

Da  $R_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+, r dr)$  gilt, existiert ein  $\tilde{\alpha}_0 > 0$ , sodass

$$F_{\theta_n(j)}^{\nu, \kappa_j}(2\alpha R_1 \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}) \geq 0 \quad (3.13.5)$$

für alle  $\alpha \in [0, \tilde{\alpha}_0)$  gilt.

Für  $R_2$  verwenden wir (3.5.94) und erhalten

$$\begin{aligned} & \text{Rang } P_{(-\infty, 0)}(F_{\theta_n(j)}^{\nu, \kappa_j}(2\alpha R_2 \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})) \\ & \leq \text{Rang } P_{(-\infty, 0)}(|D_{\pi/2}^{0, \kappa_j}| - 2(K_n^\nu)^{-1/2} \alpha R_2 \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}) \\ & \leq \sum_{j \in \mathfrak{I}_n} \text{Rang } P_{(-\infty, 0)}(|D_{\pi/2}^{0, \kappa_j}| - 2(K_n^\nu)^{-1/2} \alpha R_2 \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}) \\ & = \text{Rang } P_{(-\infty, 0)}\left((- \Delta)^{1/2} - 2(K_n^\nu)^{-1/2} \alpha R_2(| \cdot |) \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N}\right). \end{aligned} \quad (3.13.6)$$

Nach (2.5.4) überschreitet die rechte Seite von (3.13.6) nicht

$$C_n^{1/2, \Delta} N 2^{2n-1} (K_n^\nu)^{-n/2} \alpha^n \pi \int_0^\infty R_2^n(r) r^{n-1} dr =: (\alpha/\tilde{\alpha}_1)^n.$$

Daher hat für  $\alpha \in [0, \tilde{\alpha}_1)$  und alle  $j \in \mathfrak{I}_n$  mit  $\kappa_j^2 > \nu^2 + 1/4$  der Operator  $F_{\theta_n(j)}^{\nu, \kappa_j}(2\alpha R_2 \mathbb{I}_{\mathbb{C}^N})$  kein negatives Spektrum.

In Kombination mit (3.13.5), (3.13.3) schließen wir daraus, dass (3.13.2) für alle  $j \in \mathfrak{I}_n$  gilt, solange  $\alpha \in [0, \alpha_c)$  mit

$$\alpha_c := \min(\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1\} \cup \{\alpha_j : j \in \mathfrak{I}_n, \kappa_j^2 \leq \nu^2 + 1/4\}) > 0$$

erfüllt ist.

### 3.14 Beweis von Satz 2.6.5

Für  $\psi \in P_{\theta_n(j),+}^{\nu, \kappa_j} \mathfrak{D}(D_{\theta_n(j)}^{\nu, \kappa_j})$  beliebig definieren wir

$$\Psi := (\mathcal{A}_n \mathcal{S}_n)^* \bigoplus_{j' \in \mathfrak{I}_n} \delta_{j,j'} \psi \in \mathbf{P}_{\theta_n,+}^\nu \mathfrak{D}(\mathbf{D}_{\theta_n}^\nu).$$

Nach Lemma 2.5.1, (2.6.6), (2.6.31), (2.6.33) und (3.5.33) gilt

$$\langle \Psi, \mathbf{F}_{\theta_n}^\nu(V) \Psi \rangle = \begin{cases} \langle \psi, F_{\theta_2(j)}^{\nu, \kappa_j}(Q) \psi \rangle & \text{falls } n = 2, \\ \langle \psi, F_{\theta_3(j)}^{\nu, \kappa_j}(Q_j) \psi \rangle & \text{falls } n = 3. \end{cases} \quad (3.14.1)$$

Aus Satz 2.6.2 (I) folgt, dass ein  $\psi$  existiert, sodass die rechte Seite von (3.14.1) negativ ist. Mit dem Minimax-Prinzip schlussfolgern wir die Behauptung.



## Literaturverzeichnis

- [1] V. Bach, J.-M. Barbaroux, B. Helffer und H. Siedentop. On the stability of the relativistic electron-positron field. *Communications in Mathematical Physics*, 201(2):445–460, 1999.
- [2] A. A. Balinsky und W. D. Evans. *Spectral analysis of relativistic operators*. Imperial College Press, 2011.
- [3] M. S. Birman und M. Z. Solomjak. *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [4] A. Bouzouina. Stability of the two-dimensional Brown-Ravenhall operator. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 132(05):1133–1144, 2002.
- [5] G. E. Brown und D. G. Ravenhall. On the interaction of two electrons. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 208(1095):552–559, 1951.
- [6] R. Brummelhuis, N. Röhl und H. Siedentop. Stability of the relativistic electron-positron field of atoms in Hartree-Fock approximation: Heavy elements. *Documenta Mathematica*, 1505(6):1–8, 2001.
- [7] K. M. Case. Singular potentials. *Physical Review*, 80:797–806, 5, 1950.
- [8] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov und A. K. Geim. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*, 81:109–162, 1, 2009.
- [9] P. Chaix und D. Iracane. From quantum electrodynamics to mean-field theory I: The Bogoliubov-Dirac-Fock formalism. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 22(23):3791, 1989.
- [10] P. Chaix, D. Iracane und P. L. Lions. From quantum electrodynamics to mean-field theory II: Variational stability of the vacuum of quantum electrodynamics in the mean-field approximation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 22(23):3815, 1989.
- [11] W. Cheney. *Analysis for applied mathematics*, Band 208. Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] R. Courant. Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Zeitschrift*, 7(1-4):1–57, 1920.
- [13] J.-C. Cuenin und H. Siedentop. Dipoles in graphene have infinitely many bound states. *Journal of Mathematical Physics*, 55(12), 2014.

- [14] M. Cwikel. Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators. *Annals of Mathematics*, 106(1):93–100, 1977.
- [15] S. N. Datta und G. Devaiah. The minimax technique in relativistic Hartree-Fock calculations. English. *Pramana*, 30(5):387–405, 1988.
- [16] P. A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 117(778):610–624, 1928.
- [17] J. Dolbeault, M. J. Esteban, M. Loss und L. Vega. An analytical proof of Hardy-like inequalities related to the Dirac operator. *Journal of Functional Analysis*, 216(1):1–21, 2004.
- [18] J. Dolbeault, M. J. Esteban und E. Séré. On the eigenvalues of operators with gaps. Application to Dirac operators. *Journal of Functional Analysis*, 174(1):208–226, 2000.
- [19] J. Dolbeault, M. J. Esteban und E. Séré. Variational characterization for eigenvalues of Dirac operators. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 10(4):321–347, 2000.
- [20] S.-H. Dong und Z.-Q. Ma. Exact solutions to the Dirac equation with a Coulomb potential in 2+1 dimensions. *Physics Letters A*, 312(1):78–83, 2003.
- [21] C. A. Downing, D. A. Stone und M. E. Portnoi. Zero-energy states in graphene quantum dots and rings. *Physical Review B*, 84:155437, 15, 2011.
- [22] R. Egger, A. D. Martino, H. Siedentop und E. Stockmeyer. Multiparticle equations for interacting Dirac fermions in magnetically confined graphene quantum dots. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(21):215202, 2010.
- [23] T. Ekholm und R. L. Frank. On Lieb-Thirring inequalities for Schrödinger operators with virtual level. *Communications in Mathematical Physics*, 264(3):725–740, 2006.
- [24] M. J. Esteban, M. Lewin und E. Séré. Domains for Dirac-Coulomb min-max levels. *arXiv preprint arXiv:1702.04976*, 2017.
- [25] M. J. Esteban und M. Loss. Self-adjointness via partial Hardy-like inequalities. In *Mathematical results in quantum mechanics*, Seiten 41–47. World Scientific Publishing Co., 2008.



- [26] M. J. Esteban und E. Séré. Existence and multiplicity of solutions for linear and nonlinear Dirac problems. In *Partial differential equations and their applications*. Band 12, CRM Proceedings & Lecture Notes, Seiten 107–118. American Mathematical Society, 1997.
- [27] W. D. Evans, P. Perry und H. Siedentop. The spectrum of relativistic one-electron atoms according to Bethe and Salpeter. *Communications in Mathematical Physics*, 178(3):733–746, 1996.
- [28] C. Fefferman und M. Weinstein. Honeycomb lattice potentials and Dirac points. *Journal of the American Mathematical Society*, 25(4):1169–1220, 2012.
- [29] R. L. Frank. A simple proof of Hardy-Lieb-Thirring inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 290(2):789–800, 2009.
- [30] R. L. Frank. Cwikel’s theorem and the CLR inequality. *Journal of Spectral Theory*, 4(1):1–21, 2014.
- [31] R. L. Frank. Eigenvalue bounds for the fractional Laplacian: A review. *Preprint arXiv:1603.09736*, 2016.
- [32] R. L. Frank, E. H. Lieb und R. Seiringer. Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrödinger operators. *Journal of the American Mathematical Society*, 21(4):925–950, 2008.
- [33] K. Friedrichs. Spektralthorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. *Mathematische Annalen*, 109(1):465–487, 1934.
- [34] M. Griesemer, R. T. Lewis und H. Siedentop. A minimax principle for eigenvalues in spectral gaps: Dirac operators with Coulomb potentials. *Documenta Mathematica*, 4:275–283, 1999.
- [35] M. Griesemer und H. Siedentop. A minimax principle for the eigenvalues in spectral gaps. *Journal of the London Mathematical Society*, 60(2):490–500, 1999.
- [36] C. Gutiérrez, L. Brown, C.-J. Kim, J. Park und A. N. Pasupathy. Klein tunnelling and electron trapping in nanometre-scale graphene quantum dots. *Nature Physics*, 12(11):1069–1075, 2016.
- [37] G. H. Hardy. Note on a theorem of Hilbert. *Mathematische Zeitschrift*, 6(3-4):314–317, 1920.
- [38] D. R. Hartree. The wave mechanics of an atom with a non-Coulomb central field I: Theory and methods. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24(1):89–110, 1928.

- [39] I. W. Herbst. Spectral theory of the operator  $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2/r$ . *Communications in Mathematical Physics*, 53(3):285–294, 1977.
- [40] H. Kalf, U.-W. Schmincke, J. Walter und R. Wüst. On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials. In *Spectral theory and differential equations*, Seiten 182–226. Springer Verlag, 1975.
- [41] H. Kalf und O. Yamada. Essential self-adjointness of n-dimensional Dirac operators with a variable mass term. *Journal of Mathematical Physics*, 42(6):2667–2676, 2001.
- [42] T. Kato. Holomorphic families of Dirac operators. *Mathematische Zeitschrift*, 183(3):399–406, 1983.
- [43] M. Klaus und R. Wüst. Characterization and uniqueness of distinguished selfadjoint extensions of Dirac operators. *Communications in Mathematical Physics*, 64(2):171–176, 1978.
- [44] A. Laptev und T. Weidl. Recent results on Lieb-Thirring inequalities. In *Équations aux Dérivées Partielles*. Université de Nantes, 2000.
- [45] A. Le Yaouanc, L. Oliver und J.-C. Raynal. The Hamiltonian  $(p^2 + m^2)^{1/2} - \alpha/r$  near the critical value  $\alpha_c = 2/\pi$ . *Journal of Mathematical Physics*, 38(8):3997–4012, 1997.
- [46] J. Lee, D. Wong, J. J. Velasco, J. F. Rodriguez-Nieva, S. Kahn, H.-Z. Tsai, T. Taniguchi, K. Watanabe, A. Zettl, F. Wang, L. S. Levitov und M. F. Crommie. Imaging electrostatically confined Dirac fermions in graphene quantum dots. *Nature Physics*, 12:1032–1036, 2016.
- [47] E. Lieb. Bounds on the eigenvalues of the Laplace and Schrödinger operators. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(5):751–753, 1976.
- [48] E. H. Lieb und W. E. Thirring. *Studies in Mathematical Physics: Essays in Honor of Valentine Bargmann*. In Princeton University Press, 1976. Teil Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities, Seiten 269–304.
- [49] S. Morozov und D. Müller. Lieb-Thirring and Cwickel-Lieb-Rozenblum inequalities for perturbed graphene with a Coulomb impurity. *Erscheint in Journal of Spectral Theory - Preprint arXiv:1603.01485*, 2016.
- [50] S. Morozov und D. Müller. Lower bounds on the moduli of three-dimensional Coulomb-Dirac operators via fractional Laplacians with applications. *Journal of Mathematical Physics*, 58(7):072302, 2017.

- [51] S. Morozov und D. Müller. On the minimax principle for Coulomb-Dirac operators. *Mathematische Zeitschrift*, 280:733–747, 2015.
- [52] S. Morozov und D. Müller. On the virtual levels of positively projected massless Coulomb-Dirac operators. *Annales Henri Poincaré*, 18:2467–2497, 2017.
- [53] D. Müller. Minimax principles, Hardy-Dirac inequalities, and operator cores for two and three dimensional Coulomb-Dirac operators. *Documenta Mathematica*, 21:1151–1169, 2016.
- [54] G. Nenciu. Self-adjointness and invariance of the essential spectrum for Dirac operators defined as quadratic forms. *Communications in Mathematical Physics*, 48(3):235–247, 1976.
- [55] NIST digital library of mathematical functions. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.10 of 2015-08-07. URL: <http://dlmf.nist.gov/>. Online Begleiter von [56].
- [56] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert und C. W. Clark, Herausgeber. *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge University Press, 2010. Gedruckter Begleiter von [55].
- [57] V. M. Pereira, J. Nilsson und A. H. Castro Neto. Coulomb impurity problem in graphene. *Physical Review Letters*, 99:166802, 16, 2007.
- [58] M. Reed und B. Simon. *Methods of modern mathematical physics II: Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press, New York – London, 1975.
- [59] G. V. Rozenbljum. Distribution of the discrete spectrum of singular differential operators. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 202:1012–1015, 1972.
- [60] U.-W. Schmincke. Distinguished selfadjoint extensions of Dirac operators. *Mathematische Zeitschrift*, 129(4):335–349, 1972.
- [61] F. Schwabl. *Quantum Mechanics*. Springer Verlag, 4. Auflage, 2007.
- [62] W. Schwarz und H. Wallmeier. Basis set expansions of relativistic molecular wave equations. *Molecular Physics*, 46(5):1045–1061, 1982.
- [63] P. G. Silvestrov und K. B. Efetov. Quantum dots in graphene. *Physical Review Letters*, 98:016802, 1, 2007.
- [64] B. Simon. The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions. *Annals of Physics*, 97(2):279–288, 1976.
- [65] B. Simon. *Trace ideals and their applications*, Band 120 der Reihe *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2. Auflage, 2005.

- [66] J. C. Slater. The theory of complex spectra. *Physical Review*, 34:1293–1322, 10, 1929.
- [67] J. P. Solovej, T. Ø. Sørensen und W. L. Spitzer. Relativistic Scott correction for atoms and molecules. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 63(1):39–118, 2010.
- [68] R. E. Stanton und S. Havriliak. Kinetic balance: A partial solution to the problem of variational safety in Dirac calculations. *The Journal of Chemical Physics*, 81(4):1910–1918, 1984.
- [69] J. Sucher. Foundations of the relativistic theory of many-electron atoms. *Physical Review A*, 22:348–362, 2, 1980.
- [70] B. Swirles. The relativistic self-consistent field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 152(877):625–649, 1935.
- [71] J. D. Talman. Minimax principle for the Dirac equation. *Physical Review Letters*, 57(9):1091–1094, 1986.
- [72] G. Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics*, Band 99. American Mathematical Society, 2009.
- [73] B. Thaller. *The Dirac equation*. Springer Verlag, 1992.
- [74] E. C. Titchmarsh. *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Oxford University Press, 1948.
- [75] C. Tix. Self-adjointness and spectral properties of a pseudo-relativistic Hamiltonian due to Brown and Ravenhall. *Mathematical Physics Preprint Archive*, 97-441, 1997.
- [76] B. L. Voronov, D. M. Gitman und I. V. Tyutin. The Dirac Hamiltonian with a superstrong Coulomb field. *Theoretical and Mathematical Physics*, 150(1):34–72, 2007.
- [77] P. R. Wallace. The band theory of graphite. *Physical Review*, 71:622–634, 9, 1947.
- [78] H. Wallmeier und W. Kutzelnigg. Use of the squared Dirac operator in variational relativistic calculations. *Chemical Physics Letters*, 78(2):341–346, 1981.
- [79] C. Warmt. Semiklassische Asymptotik der Resolvente eines Diracoperators. *Ludwig-Maximilians-Universität München*, 2011. URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:19-135987>.
- [80] T. Weidl. Remarks on virtual bound states for semi-bounded operators. *Communications in Partial Differential Equations*, 24(1-2):25–60, 1999.

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [81] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*, Band 68 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1980.
- [82] J. Weidmann. Oszillationsmethoden für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, 119:349–373, 1971.
- [83] J. Weidmann. *Spectral theory of ordinary differential operators*, Band 1258 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1987.
- [84] H. Weyl. Singuläre Integralgleichungen. *Mathematische Annalen*, 66(3):273–324, 1908.
- [85] E. T. Whittaker und G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, 1996.
- [86] R. Wüst. Distinguished self-adjoint extensions of Dirac operators constructed by means of cut-off potentials. *Mathematische Zeitschrift*, 141(1):93–98, 1975.



## Danksagung

Ich bedanke mich bei Herr Prof. Dr. Heinz Siedentop für die Betreuung meines Dissertationsvorhabens. Herr Prof. TeknD Timo Weidl und Herr Prof. Dr. Marcel Griesemer möchte ich dafür Dank aussprechen, dass sie sich als Gutachter zur Verfügung gestellt haben. Bei Herr Dr. Sergey Morozov bedanke ich mich für die erfolgreiche und freundschaftliche Zusammenarbeit und dafür, dass er sich immer die Zeit genommen hat um über meine Fragen und Probleme zu diskutieren. Herr Prof. Dr. Hubert Kalf danke ich für hilfreiche Literaturhinweise und wertvolle Anmerkungen. Für Feedback zu meiner Dissertation möchte ich meine Dankbarkeit gegenüber Herr Peter Weiland und Herr Benedikt Richter zum Ausdruck bringen.

Für stete Aufmunterung und die Abnahme zahlreicher Pflichten möchte ich mich bei meiner Freundin Claudia bedanken. Meiner Tochter Lena möchte ich für ihre bedingungslose Liebe Danke sagen. Abschließend bin ich meinen Eltern für deren uneingeschränkte Hilfsbereitschaft dankbar.





# **Eidesstattliche Versicherung**

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass die Dissertation von mir selbstständig, ohne unerlaubte Beihilfe angefertigt wurde.

München, 15. Juli 2018

David Müller